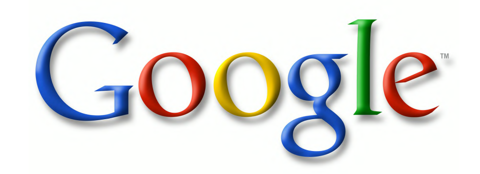


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

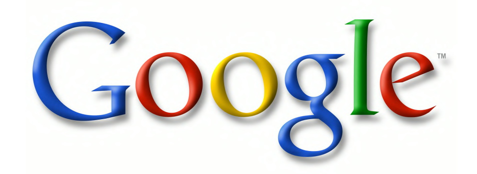
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

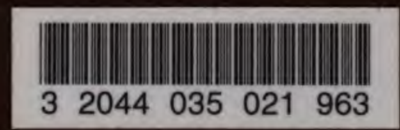
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

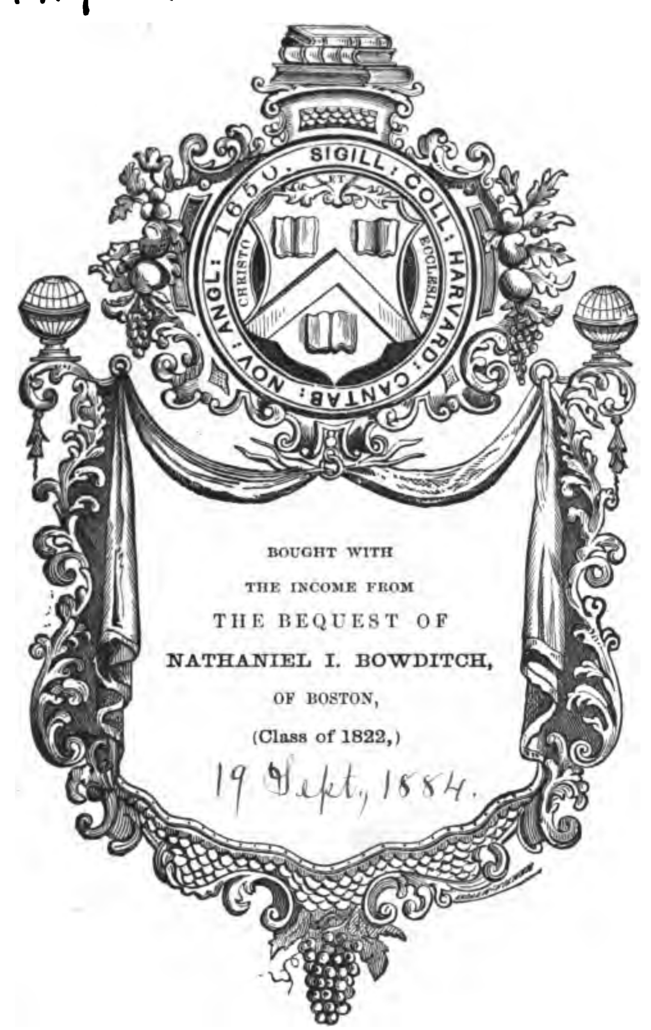
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Phys 3408 81



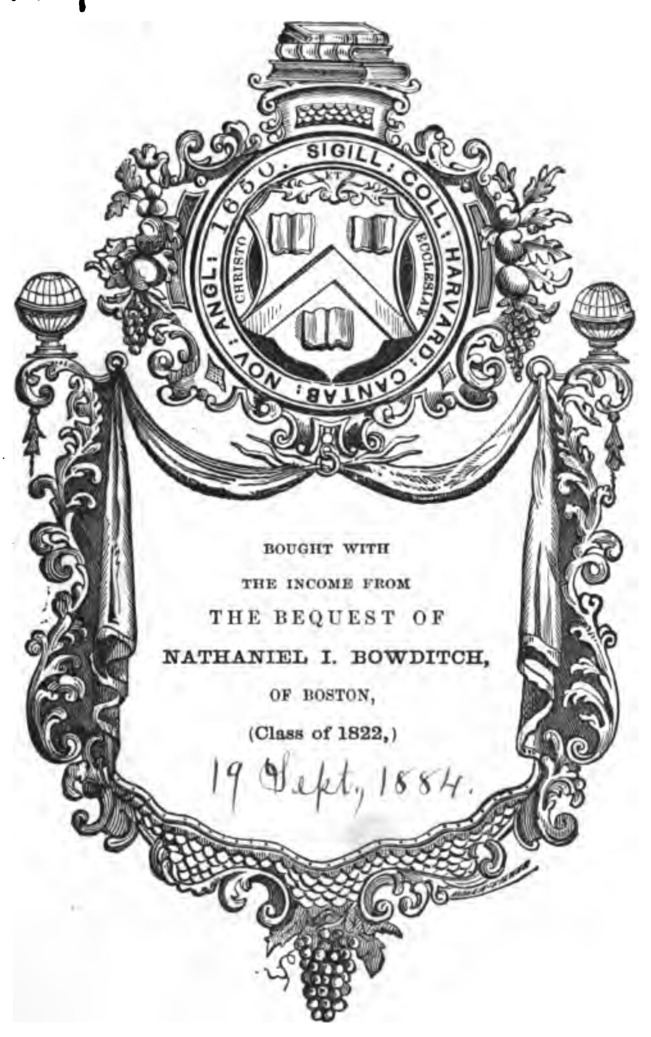


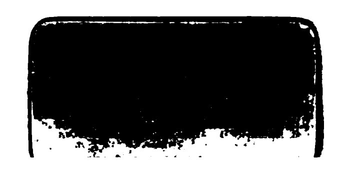
Phys 3408.81



BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)
19 Sept, 1884.

Phys 3408.81


SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)
19 Sept, 1884.



VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DES MAGNETISMUS

NAMENTLICH ÜBER DIE

THEORIE DER MAGNETISCHEN INDUKTION.

VON

Franz Ernst

DR. F. NEUMANN,

PROFESSOR DER PHYSIK UND MINERALOGIE AN DER UNIVERSITÄT ZU KÖNIGSBERG I. PR.

BG

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1881.

~~F11789~~
Phys 3408.81

SEP 19 1884
Bowditch fund.

Vorwort des Herausgebers.

Mit Erlaubniss meines Vaters veröffentliche ich hier die von demselben *im Sommersemester 1857 an der Königsberger Universität gehaltene Vorlesung über Magnetismus*, mich dabei stützend auf diejenigen Vorlesungshefte, welche von zweien der damaligen Zuhörer, nämlich von den Herren *Lothar Meyer* (jetzt Professor in Tübingen) und *Oscar Emil Meyer* (jetzt Professor in Breslau) ausgearbeitet wurden. Um ein möglichst getreues Bild der Vorlesung zu geben, habe ich den Text der genannten Hefte im Wesentlichen beibehalten, und nur unbedeutende Abänderungen mir erlaubt.

Uebrigens ist die Theorie des Magnetismus von meinem Vater *wiederholentlich* zum Gegenstande seiner Vorlesungen gewählt, und zu verschiedenen Zeiten in *verschiedener* Weise behandelt worden. Und demgemäss ist das hier vorliegende Werk, welches speciell die Vorlesung *vom Sommersemester 1857* zu reproduciren versucht, immerhin mit einer gewissen Einseitigkeit behaftet. So z. B. sind die zu den Fundamentalgleichungen der magnetischen Induktion hinleitenden Betrachtungen im vorliegenden Werk (§ 12 — § 17) ziemlich kurz behandelt, während dieselben zu *andern* Zeiten von meinem Vater mit grösserer Ausführlichkeit dargelegt worden sind. Demgemäss wird es vielleicht angemessen sein, in einiger Zeit einen hierauf bezüglichen Nachtrag folgen zu lassen.

Es mag mir gestattet sein, über den Inhalt und die Aufeinanderfolge der hier reproducirten Vorlesungen (vom Sommersemester 1857) einen kurzen Ueberblick vorauszuschicken.

Diese Vorlesungen beginnen mit einfachen Expositionen über das magnetische Potential, die magnetischen Momente, die magnetische Axe, etc., besprechen dabei gelegentlich die berühmte *Poisson-Gauss*'sche Methode zur Bestimmung der horizontalen Componente des Erdmagnetismus, und gehen sodann über zur *Theorie der magnetischen Induktion*, wobei der Reihe nach zuerst der Fall behandelt wird, dass die inducirenden oder magnetisirenden Kräfte von der Zeit unabhängig sind, sodann der allgemeinere Fall, dass dieselben gegebene Funktionen der Zeit sind.

Hierauf werden diese theoretischen Betrachtungen auf mehrere specielle Fälle in Anwendung gebracht, namentlich auf den Fall, dass

der inducirte (aus weichem Eisen bestehende) Körper eine *Kugel* oder eine *Hohlkugel* oder ein *Ellipsoid* (namentlich ein Rotationsellipsoid) ist; während gleichzeitig als inducirende oder magnetisirende Ursache entweder der *Erdmagnetismus*, oder ein gegebener *Stahlmagnet*, oder endlich ein *System elektrischer Ströme* in Betracht kommt. Auch schliessen sich an diese Untersuchungen wichtige Bemerkungen über *experimentelle Methoden*. So z. B. werden mehrere Methoden entwickelt zur Messung der magnetischen Induktionsconstante. Ferner wird eine Methode angegeben, um die Inclination des Erdmagnetismus zu bestimmen durch die Beobachtung der *horizontalen* Ablenkung einer Compassnadel. U. s. w.

Daneben wird beiläufig gezeigt, wie man einen Multiplikator durch geeignete Anordnung seiner elektrischen Stromwindungen in eine *wirkliche Tangentenboussole* d. i. in ein Instrument verwandeln kann, bei welchem die trigonometrische Tangente des Ablenkungswinkels von der vorhandenen Stromstärke wirklich nur durch einen *constanten* Faktor sich unterscheidet. Denkt man sich nämlich ein System elektrischer Kreisströme, die alle auf ein und derselben Kugelfläche liegen, und mit irgend welchen Parallelkreisen dieser Fläche zusammenfallen, und bezeichnet man die von all' diesen Kreisströmen auf einen magnetischen Massenpunkt ausgeübte Kraft mit R, so lässt sich, — wie diese Vorlesungen zeigen, — die Anordnung jener Parallelkreise auf der Kugelfläche stets in solcher Weise einrichten, dass die Kraft R von *constanter Richtung und Stärke* wird für alle Punkte innerhalb der gegebenen Kugelfläche.

Schliesslich wird das allgemeine Problem der magnetischen Induktion auf die Ermittelung einer gewissen *„charakteristischen Funktion"* reducirt, welche nur noch von der Oberflächengestalt des inducirten Körpers abhängt, und welche demgemäss für die Theorie des *magnetischen* Induktion von derselben fundamentalen Bedeutung sein dürfte, wie die bekannte *Green'sche Funktion* für die Probleme der *elektrischen* Induktion.

Es bedarf übrigens wohl kaum der Bemerkung, dass die in diesen Vorlesungen entwickelte Theorie der magnetischen Induktion auf den berühmten *Abhandlungen von Poisson* über diesen Gegenstand beruht. Man findet diese beiden Abhandlungen: *„Sur la théorie du magnétisme"* und *„Sur la théorie du magnétisme en mouvement"* respective im fünften und sechsten Bande der Memoiren der Pariser Akademie.

Leipzig, August 1881. **C. N.**

Inhaltsübersicht.

Einleitende Bemerkungen.

Die gegenseitige Einwirkung zwischen permanenten Magneten.

Das Potential eines magnetischen Körpers auf einen einzelnen magnetischen Massenpunkt.

Die Theorie der magnetischen Induktion.

Anwendung der allgemeinen Theorie auf einen ruhenden Körper, unter der Voraussetzung, dass die gegebenen inducirenden Kräfte ihrer Stärke und Richtung nach constant sind.

Zugehörige Literatur.

F. Neumann: Entwicklung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reçiproken Entfernung zweier Punkte in Reihen, welche nach den *Laplace*'schen $Y^{(n)}$ fortschreiten; und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des *magnetischen Zustandes eines Rotationsellipsoides,* welcher durch vertheilende Kräfte erregt ist. *1847*. Im Crelle'schen Journal, Bd. 37.

F. Neumann: Ueber eine neue Eigenschaft der *Laplace*'schen $Y^{(n)}$, und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind. Schumacher's Astronomische Nachrichten von *1838*. Von Neuem abgedruckt in den Mathem. Annalen, Bd. 14.

Verbesserung.

In der Formel (2.), Seite 30 ist zur Wurzelgrösse *rechter* Hand der Faktor p hinzuzufügen.

§ 1.

Grundvorstellungen.

Der Gegenstand der nachfolgenden Theorie ist derjenige Zustand des Magnetismus, der durch äussere Einflüsse, etwa elektrische Ströme, hervorgebracht wird. Dieser magnetische Zustand hängt ab von der Intensität, der Lage und Richtung des inducirenden Stroms oder der sonstigen inducirenden Ursache, und andererseits von der Grösse, Gestalt und Lage des magnetisirten Körpers. Es wird unsere Aufgabe sein, ihn als Funktion dieser Grössen darzustellen. Man pflegt diese Art des Magnetismus den *beweglichen Magnetismus* zu nennen wegen seiner Abhängigkeit von der relativen Lage, oder auch den *Magnetismus der Lage* insofern der Erdmagnetismus die inducirende Ursache ist und in diesem Falle der Magnetismus nur von der Lage des magnetisirten Körpers abhängt.

Wir legen der Theorie die Vorstellung *zweier magnetischer Flüssigkeiten*, einer *nördlichen* und einer *südlichen*, zu Grunde. Wir bemerken aber von vorneherein, dass es auf den Erfolg ohne Einfluss ist, ob wir von dieser Anschauung ausgehen oder von der *Ampère*'schen, nach der keine magnetischen Flüssigkeiten existiren, sondern die Erscheinungen hervorgebracht werden durch elektrische Solenoidströme, welche die Moleküle des Eisens umkreisen.

Die beiden magnetischen Flüssigkeiten ziehen sich an und stossen sich ab nach dem bekannten Gesetze, dass die gleichartigen sich abstossen, die ungleichartigen sich anziehen. Das Gesetz der Anziehung ist dasselbe wie das der Abstossung, beide sind dem umgekehrten Quadrate der Entfernung proportional. Die gegenseitige Wirkung von zwei magnetischen Theilchen μ und μ' in der Entfernung E wird also in beiden Fällen durch die Formel dargestellt sein:

$$(\text{Abstossende Kraft}) = \frac{\mu\mu'}{E^2};$$

falls man nämlich jede Masse μ als *positiv* oder *negativ* betrachtet, jenachdem sie der *nördlichen* oder *südlichen* Flüssigkeit angehört.

Diese Hypothese der Theorie lässt sich nicht direkt beweisen, sondern sie kann nur durch ihre Folgerungen bestätigt werden.

§ 2.
Magnetische Einheiten.

Um die Grössen μ und μ_1, die magnetischen Massen näher zu definiren und sie auf eine Einheit zurückzuführen, stellen wir folgende Betrachtung an.

Wir denken uns von den beiden Massen μ und μ_1, die sich in der Entfernung E von einander befinden, die erstere μ in einem Punkte fixirt und die zweite μ_1 mit der ponderablen Masse M verbunden, aber mit derselben beweglich. Durch die Einwirkung von μ auf μ_1 wird M eine bestimmte Geschwindigkeit v erhalten, und zwar ist der Zuwachs dieser Geschwindigkeit im Zeitelement

$$dv = \frac{\mu\mu_1}{E^2}\frac{1}{M}dt$$

oder es ist, wenn E sich bei der Bewegung nicht ändert, was wir uns durch irgend eine Vorrichtung bewirkt denken können, der Zuwachs der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu\mu_1}{ME^2}.$$

Nehmen wir jetzt an, dieser Zuwachs während der Zeiteinheit sei gleich der zu Grunde gelegten Längeneinheit, es sei ferner $M = 1$ und die Entfernung $E = 1$, so erhalten wir:

$$\mu\mu_1 = 1.$$

Nehmen wir also an, dass μ und μ_1 positiv sind und $\mu = \mu_1$ ist, so folgt:

$$\mu = 1 \text{ und } \mu_1 = 1.$$

Somit haben wir eine natürliche Einheit für die magnetische *Masse* gewonnen. Diese so bestimmte Einheit hat die Bedeutung, dass sie einer ihr gleichen magnetischen Masse, die mit der ponderablen Masse 1 verbunden ist, in der Einheit der Entfernung während der Zeiteinheit die Geschwindigkeit 1 zu ertheilen im Stande ist.

Wir bedürfen ferner einer Einheit der magnetischen *Kräfte.* Wirkt eine magnetische Kraft J auf eine magnetische Masse μ, die mit der ponderablen Masse M verbunden ist, so ist die Beschleunigung, die letztere erfährt,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{J\mu}{M}.$$

Wir setzen wiederum $\frac{dv}{dt} = 1$, ferner $M = 1$ und μ gleich der soeben bestimmten Einheit; dann wird

$$J = 1$$

und damit ist eine Einheit der magnetischen Kraft gegeben. Sie ist

diejenige Kraft, welche der ponderablen Masse 1, verbunden mit der magnetischen Masse 1 in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit 1 ertheilt. — Durch diese Festsetzungen ist die magnetische Kraft, sowie die magnetische Masse, auf absolutes Maass zurückgeführt.

§ 3.

Ueber die Theorie des beweglichen Magnetismus.

Der nichtmagnetische Zustand ist so definirt, dass sich an jeder Stelle gleichviel nördliche und südliche magnetische Flüssigkeit befindet. Wird einem nichtmagnetischen Körper ein magnetischer genähert, so findet eine Trennung beider Flüssigkeiten statt, die sich jedoch nicht aus dem Molekül entfernen*), (im Gegensatz zur Elektricität, die sich sogleich durch den ganzen Leiter verbreitet). Diese Trennung beider Flüssigkeiten findet so lange statt, bis die Gesammtresultante an jeder Stelle im Innern = 0 ist, oder doch einen Werth erhalten hat, der nicht mehr im Stande ist, eine weitere Trennung hervorzubringen. (Jene Gesammtresultante rührt her von der Wirkung der inducirenden Ursache und der durch die Induktion getrennten Fluida). Das Eintreten des Gleichgewichtszustandes erfordert eine gewisse Zeit, welche keineswegs unmerklich ist; alsdann aber bleibt derselbe so lange bestehen, als die inducirende Ursache sich nicht ändert. Erleidet diese aber fortwährende Aenderungen und zwar rascher, als der Gleichgewichtszustand hergestellt werden kann, so findet eine continuirliche Bewegung des Magnetismus im Innern statt. Daraus erhellt schon, dass der Zustand eines magnetischen Eisens, etwa einer Kugel, ein ganz anderer ist, je nachdem die Kugel ruht oder sich bewegt; und da der Zustand ein anderer ist, so muss auch die Wirkung nach aussen eine andere sein. Wir werden beide Fälle betrachten. Der Fall der Bewegung hat ein ganz besonderes Interesse, weil er in direktem Zusammenhang mit den Erscheinungen der Induktion durch elektrische Ströme steht.

§ 4.

Wirkung eines magnetischen Moleküls.

Bevor wir zur allgemeinen Theorie übergehen, beschäftigen wir uns mit der Frage nach der Wirkung eines magnetischen Moleküls und knüpfen daran einige Bemerkungen. Wir nehmen die Dimensio-

*) In jedem Molekül bleibt also (ebenso wie zur Zeit des natürlichen oder nichtmagnetischen Zustandes) die Menge der nördlichen Flüssigkeit *stets ebenso gross*, wie die der südlichen.

nen des betrachteten Moleküls verschwindend klein gegen die Entfernung an, in der seine Wirkung stattfindet, machen aber keinerlei Voraussetzung über die Vertheilung des Magnetismus in seinem Innern*).

Wir führen rechtwinklige Coordinaten ein, und bezeichnen die Coordinaten eines bestimmten Punktes im Innern des Moleküls, etwa seines Mittelpunktes, mit x, y, z, diejenigen irgend eines anderen Punktes im Innern des Moleküls mit $x + x_1$, $y + y_1$, $z + z_1$, (so dass x_1, y_1, z_1 die variabelen Coordinaten eines Punktes im Innern des Moleküls bezogen auf den Mittelpunkt desselben sind) und endlich die Coordinaten des Punktes, auf den die Wirkung des Moleküls betrachtet wird, mit a, b, c. Ferner sei μ die magnetische Masse, die sich im Punkte a, b, c befindet, und μ_1 diejenige im Punkte $x + x_1$, $y + y_1$, $z + z_1$. Dann ist die von einem Elemente des Moleküls auf die Masse μ im Punkte a, b, c ausgeübte Wirkung

$$(1.) \qquad \frac{\mu \mu_1}{E^2},$$

worin $E^2 = (a - x - x_1)^2 + (b - y - y_1)^2 + (c - z - z_1)^2$

ist. Die drei Componenten dieser Wirkung nach der Richtung der Coordinaten sind:

$$(2.) \qquad \begin{aligned} (X) &= \frac{\mu \mu_1 (a - x - x_1)}{E^3} = -\mu \mu_1 \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial a} \\ (Y) &= \frac{\mu \mu_1 (b - y - y_1)}{E^3} = -\mu \mu_1 \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial b} \\ (Z) &= \frac{\mu \mu_1 (c - z - z_1)}{E^3} = -\mu \mu_1 \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial c}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir

$$(3.) \qquad \varrho = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2},$$

so dass ϱ die Entfernung des Punktes, auf den die Wirkung ausgeübt wird, vom Mittelpunkte des Moleküls bedeutet, so ist durch Entwickelung nach Potenzen der kleinen Grössen x_1, y_1, z_1

$$(4.) \qquad \frac{1}{E} = \frac{1}{\varrho} + x_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z} + \cdots.$$

Lassen wir nun die Voraussetzung eintreten, dass die Dimensionen des Moleküls gegen ϱ verschwindend klein sind, so können wir

*) Doch soll bei der gegenwärtigen Betrachtung angenommen werden, dass die Vertheilung eine *bestimmt gegebene* und *unveränderliche* sei, dass also die in dem Molekül vorhandene magnetische Flüssigkeit mit seiner ponderablen Masse gewissermassen *fest verbunden ist.*

die Quadrate von x_1, y_1 und z_1 gegen diese Grösse selbst vernachlässigen. Demnach werden die Gleichungen (2.)

$$(5.)\quad \begin{aligned}
(X) &= -\mu\mu_1 \frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{1}{\varrho} + x_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}\right\} \\
(Y) &= -\mu\mu_1 \frac{\partial}{\partial b}\left\{\frac{1}{\varrho} + x_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}\right\} \\
(Z) &= -\mu\mu_1 \frac{\partial}{\partial c}\left\{\frac{1}{\varrho} + x_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}\right\}.
\end{aligned}$$

Durch Ausführung der Summation dieser Ausdrücke über alle Elemente des Moleküls finden wir als Componenten der auf μ ausgeübten Gesammtwirkung

$$(6.)\quad \begin{aligned}
X &= -\mu \frac{\partial}{\partial a} \sum \mu_1 \left\{\frac{1}{\varrho} + x_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{dy} + z_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{dz}\right\} \\
Y &= -\mu \frac{\partial}{\partial b} \sum \mu_1 \left\{\frac{1}{\varrho} + x_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}\right\} \\
Z &= -\mu \frac{\partial}{\partial c} \sum \mu_1 \left\{\frac{1}{\varrho} + x_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}\right\}.
\end{aligned}$$

Da aber in einem Molekül die Menge der nördlichen und der südlichen magnetischen Flüssigkeit gleich sein muss (Note, Seite 3), so ist $\Sigma\mu_1 = 0$. Setzen wir ferner

$$(7.)\quad \Sigma\mu_1 x_1 = \alpha, \qquad \Sigma\mu_1 y_1 = \beta, \qquad \Sigma\mu_1 z_1 = \gamma,$$

so folgt:

$$(8.)\quad \begin{aligned}
X &= -\mu \frac{\partial}{\partial a}\left\{\alpha \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}\right\} \\
Y &= -\mu \frac{\partial}{\partial b}\left\{\alpha \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}\right\} \\
Z &= -\mu \frac{\partial}{\partial c}\left\{\alpha \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{dy} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{dz}\right\}.
\end{aligned}$$

Setzen wir also:

$$(9.)\quad V = \alpha \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}$$

so wird schliesslich:

$$(10.)\quad X = -\mu \frac{\partial V}{\partial a}; \quad Y = -\mu \frac{\partial V}{\partial b}; \quad Z = -\mu \frac{\partial V}{\partial c}.$$

Die Grösse V, das *magnetische Potential* des Moleküls, hängt offenbar ab von den drei Grössen α, β und γ, die man die *magnetischen Momente* des Moleküls nennt. Dieselben spielen in der ferneren Theorie

eine sehr wichtige Rolle. Ihre Werthe hängen von der Lage des Coordinatensystems ab. Es giebt in jedem magnetischen Molekül eine Richtung, in Bezug auf welche das magnetische Moment ein Maximum ist, und welche die Eigenschaft besitzt, dass die magnetischen Momente in Beziehung auf jede darauf senkrechte Richtung $= 0$ sind.

Um diesen Satz zu beweisen, bezeichnen wir

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=\delta \tag{11.}$$

und, indem wir uns α, β und γ als Längen auf den Coordinatenaxen abgeschnitten denken, construiren wir auch δ als eine Linie; die Winkel derselben gegen die Coordinatenaxen seien m, n, p, so dass

$$\cos m=\frac{\alpha}{\delta};\quad \cos n=\frac{\beta}{\delta};\quad \cos p=\frac{\gamma}{\delta}$$

ist. Statt der bisherigen Coordinaten $x_1\, y_1\, z_1$, auf welche sich α, β, γ beziehen, führen wir ein neues System $x_2\, y_2\, z_2$ ein. Wir haben dann

$$x_2=x_1\cos(x_1,x_2)+y_1\cos(y_1,x_2)+z_1\cos(z_1,x_2)$$

und entsprechend y_2 und z_2. Multipliciren wir beide Seiten der Gleichung mit μ_1 und nehmen die Summe über das ganze Molekül, so wird

$$\Sigma\mu_1 x_2=\Sigma\mu_1\left(x_1\cos.(x_1,x_2)+y_1\cos(y_1,x_2)+z_1\cos(z_1,x_2)\right)$$

und wenn wir das magnetische Moment in Bezug auf die neue Coordinatenaxe x_2 d. i. $\Sigma\mu_1 x_2$ mit α_2 bezeichnen:

$$\alpha_2=\alpha\cos(x_1,x_2)+\beta\cos(y_1,x_2)+\gamma\cos(z_1,x_2).$$

Diese Formel können wir auch so schreiben:

$$\alpha_2=\delta\left(\cos m\cdot\cos(x_1,x_2)+\cos n\cdot\cos(y_1,x_2)+\cos p\cdot(z_1,x_2)\right)$$

oder auch so:

$$\alpha_2=\delta\cos(\delta,x_2). \tag{12.}$$

Hieraus folgt, dass es eine Richtung der Coordinatenaxe x_2 giebt, für welche das Moment α_2 ein Maximum erreicht, und diese Richtung ist die Richtung von δ; senkrecht gegen dieselbe sind die magnetischen Momente $= 0$. Diese Richtung heisst die *magnetische Axe* des Moleküls, und die Grösse δ das *grösste magnetische Moment.*

Dieselbe Eigenschaft, eine magnetische Axe zu haben, besitzt jeder magnetische Körper von endlicher Ausdehnung. Denn unsere ganze für ein magnetisches Molekül angestellte Betrachtung ist ohne Weiteres auf einen magnetischen Körper endlicher Dimensionen anwendbar, wenn wir die Wirkungen desselben auf einen Punkt betrachten, dessen Entfernung von dem Körper sehr gross ist gegen die Ausdehnung des Körpers. Daraus geht hervor, *dass jeder magnetische*

Körper seine magnetischen Momente, folglich auch seine magnetische Axe hat. Hierin liegt nichts Hypothetisches. Es wird sich im weiteren Verlaufe ergeben, inwiefern diese Eigenthümlichkeit mit der vulgären Ansicht der Magnetpole in Zusammenhang steht.

Es ist noch zu bemerken, dass δ nur eine Richtung, keinen Ort bestimmt. Dieses beruht darauf, dass wir dieselbe Relation (12.) erhalten, wenn wir den Anfangspunkt der Coordinaten $x_2\, y_2\, z_2$ gegen den von $x_1\, y_1\, z_1$, d. h. gegen den Punkt xyz, verschieben. Bezeichnen wir nämlich die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in Bezug auf den früheren xyz mit $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, so ist

$$x_2 = (x_1 - \mathfrak{x}) \cos(x_1, x_2) + (y_1 - \mathfrak{y}) \cos(y_1, x_2) + (z - \mathfrak{z}) \cos(z_1, x_2)\,.$$

Multipliciren wir aber hier wieder beide Seiten mit μ_1 und nehmen die Summe über das ganze Molekül, so erhalten wir die frühere Gleichung, da $\mathfrak{x} \cos(x_1, x_2)$, $\mathfrak{y} \cos(y_1, x_2)$ und $\mathfrak{z} \cos(z_1, x_2)$ für diese Summation constant sind und $\Sigma\mu_1 = 0$ ist.

§ 5.

Magnetische Pole.

In den Formeln des vorigen Paragraphen liegt die Erklärung gewisser Erscheinungen, die sich in der Wirkung eines Magneten nach aussen darbieten.

Wir legen das (bis jetzt noch unbestimmte) Coordinatensystem so, dass *seine x-Axe der magnetischen Axe des Moleküls parallel ist.* Das grösste magnetische Moment nennen wir m. Ausserdem setzen wir $\mu = 1$, d. h. wir nehmen in dem Punkte abc, auf den die bebetrachtete Wirkung stattfindet, die Masse 1 an. Endlich setzen wir:

$$E^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$$

Alsdann haben das magnetische Potential und die Componenten folgende Werthe:

$$V = m \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} \tag{1.}$$

$$X = -m \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial a \cdot \partial x}; \quad Y = -m \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial b \cdot \partial x}; \quad Z = -m \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial c \cdot \partial x}.$$

Bestimmen wir ferner die Richtung der y-Axe so, dass sie mit E (der Verbindungslinie der Punkte xyz und abc) und der Richtung der x-Axe (d. i. der magnetischen Axe) in einer Ebene liegt, so wird $c = z$, und man findet durch Ausführung der Differentiation

$$X = -m \left\{ \frac{1}{E^3} - \frac{3\,(a-x)^2}{E^5} \right\}; \quad Y = -3m \frac{(a-x)\,(b-y)}{E^5}; \quad Z = 0. \tag{2.}$$

Bezeichnet man ferner die Neigung von E gegen die Richtung von x mit ψ, so findet man statt dieser Gleichungen

$$(3.)\qquad X = \frac{m}{E^3}\left\{3\cos^2\psi - 1\right\};\quad Y = \frac{3m\cos\psi\,.\,\sin\psi}{E^3}.$$

Diese Gleichungen führen auf folgenden Satz: *Die Wirkung eines magnetiscken Moleküls auf einen äusseren Punkt kann immer ersetzt werden durch die zweier magnetischer Punkte, die beide innerhalb des magnetischen Moleküls in sehr kleiner Entfernung von einander liegen, und in deren jedem man sich eine gleiche, aber entgegengesetzte Menge magnetischer Masse denkt.*

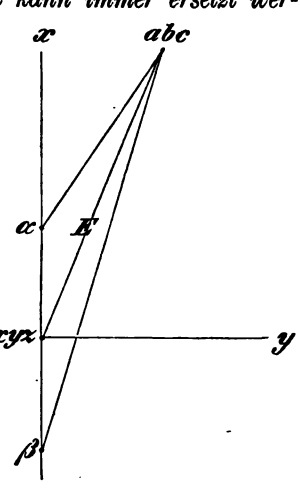


Fig. 1.

Um diesen Satz zu beweisen, verfahren wir so, dass wir 2 solcher Punkte α und β annehmen und ihre Wirkung auf den Punkt abc mit der Masse 1 berechnen, wenn in α die Masse μ und in β die entsprechende $-\mu$ sich befindet. Bezeichnen wir ihren unendlich kleinen Abstand von dem Mittelpunkte xyz des Moleküls mit δ*), so sind ihre Gesammtcomponenten auf abc

$$(4.)\qquad \begin{aligned} X &= \frac{\mu\,(E\cos\psi - \delta)}{[E^2\sin^2\psi + (E\cos\psi - \delta)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu\,(E\cos\psi + \delta)}{[E^2\sin^2\psi + (E\cos\psi + \delta)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ Y &= \frac{\mu\,E\sin\psi}{[E^2\sin^2\psi + (E\cos\psi - \delta)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu\,E\sin\psi}{[E^2\sin^2\psi + (E\cos\psi + \delta)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Entwickeln wir nach Potenzen von δ, so ist mit Vernachlässigung von δ^2

$$(5.)\qquad X = \frac{2\delta\mu}{E^3}\left\{3\cos^2\psi - 1\right\};\quad Y = \frac{2\delta\mu}{E^3}\,3\cos\psi\sin\psi\,.$$

Diese Grössen stimmen mit den früheren in den Gleichungen (3.) überein, wenn

$$(6.)\qquad m = 2\delta\mu$$

ist, und damit ist der eben aufgestellte Satz bewiesen.

Nach der Gleichung (6.) ist das magnetische Moment m nichts Anderes als das Produkt einer magnetischen Masse mit einer Entfernung. Auf dieser Bedeutung von m beruht die Vorstellung von *magne-*

*) In der Figur soll also die Länge der Linie $(\alpha\beta)$ gleich 2δ, und der Punkt xyz im Mittelpunkt dieser Linie gelegen sein.

tischen Polen, zunächst eines Moleküls, dann eines wirklichen Magneten. Es ist aber klar, dass diese Magnetpole keine bestimmte Lage haben, da die *Entfernung* δ *nicht bestimmt* werden kann, sondern nur m selbst. Auch geht aus unserer Betrachtung hervor, dass es nur dann einen Sinn hat, von magnetischen Polen zu reden, wenn es sich um die Wirkung eines Magneten in grössere Entfernungen handelt.

Dieser Satz, dass statt der Wirkung eines magnetischen Moleküls oder eines Magneten, wenn es sich um sehr weite Entfernungen handelt, die von 2 magnetischen Punkten substituirt werden kann, erinnert an einen entsprechenden Satz der Gravitation. Findet nämlich die Wirkung auf weite Entfernung statt, so ist die Form der anziehenden Massen gleichgültig und man kann in erster Annäherung sich die sämmtlichen Massen in einem beliebigen Punkte innerhalb derselben vereinigt denken, in zweiter Annäherung im Schwerpunkte der Massen. Unser Satz ist aber diesem nicht bloss analog, sondern identisch derselbe, da er nichts weiter sagt, als dass man sich beide Arten magnetischer Materie, jede für sich in einem innern Punkte des Moleküls concentrirt denken darf.

Auf die obigen Formeln gründet sich eine einfache Methode, die Wirkung eines magnetischen Moleküls auf einen beliebigen Punkt durch Construktion darzustellen. Es sei $\alpha\beta$ die magnetische Axe, A der Mittelpunkt des Moleküls, B der Punkt, auf den die Wirkung gesucht wird. Man theile $AB = E$ in 3 gleiche Theile, errichte in γ eine Senkrechte und ziehe δB*); dann ist δB die Richtung der Wirkung des Moleküls auf den Punkt B.

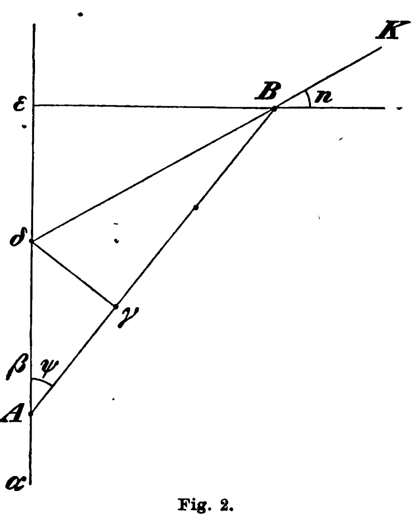


Fig. 2.

Gesetzt nämlich, es sei dies der Fall, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (5.) für den in der Figur mit n bezeichneten Winkel die Formel:

$$\text{(7.)} \qquad \operatorname{tg} n = \frac{X}{Y} = \frac{3\cos^2\psi - 1}{3\cos\psi\sin\psi}.$$

*) Man vrgl. die Figur. Es soll nämich γ auf der Linie AB eine solche Lage haben, dass $A\gamma$ der *dritte Theil* der Linie AB ist. Ferner soll δ derjenige Punkt sein, in welchem das in γ auf AB errichtete Perpendikel von der magnetischen Axe $\alpha\beta$ geschnitten wird.

Nun ist aber

$$\varepsilon\delta = E \sin\psi \operatorname{tg} n, \quad \text{und} \quad A\varepsilon = E\cos\psi,$$

$$(8.)\quad \begin{aligned} &\text{mithin:}\quad A\delta = E(\cos\psi - \sin\psi \operatorname{tg} n), \\ &\text{folglich:}\quad A\gamma = E(\cos\psi - \sin\psi \operatorname{tg} n)\cos\psi; \end{aligned}$$

und setzt man hierin den Werth von $\operatorname{tg} n$ aus der Gleichung (7.) ein, so ergiebt sich

$$A\gamma = \tfrac{1}{3} E.$$

Hiermit ist die Construktionsmethode als richtig erwiesen.

Als Beispiel derselben benutzen wir die Vorstellung, die man vom Erdmagnetismus hatte, als man anfing, sich mit diesem Gegenstande zu beschäftigen, d. h. wir denken uns im Mittelpunkte der Erde einen Magneten. Die Wirkung desselben auf einen Punkt an der Erdoberfläche ist analog der eines magnetischen Moleküls. Wir können also die Wirkung des Erdmagnetismus auf eine Inclinationsnadel oder vielmehr die *Richtung* dieser Wirkung mittelst der soeben besprochenen Construktion erhalten. In den verschiedenen Breiten finden wir demnach die in nebenstehender Figur angegebenen Richtungen.

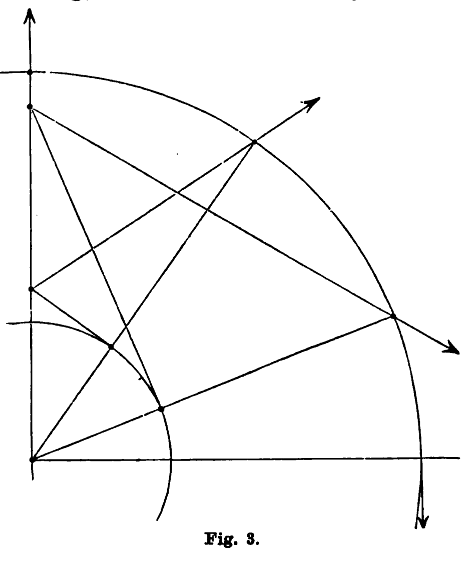


Fig. 3.

§ 6.

Methode zur Bestimmung der magnetischen Axe eines Magneten.

Methoden zur Bestimmung der magnetischen Axe und zur Messung magnetischer Kräfte und Momente.

Bei der nachfolgenden Methode, die Lage der magnetischen Axe eines Magneten empirisch zu bestimmen, ist eine magnetische Kraft vorausgesetzt, deren Sitz unendlich weit entfernt ist; eine solche haben wir im Erdmagnetismus.

Wir verlegen den Anfangspunkt der Coordinaten xyz in den Schwerpunkt des zu untersuchenden Magneten: an einer beliebigen Stelle xyz desselben befinde sich die magnetische Masse μ. Die Componenten des Erdmagnetismus nach den Coordinatenrichtungen seien A, B, C und die Gesammtkraft desselben R.

Dann sind die auf ein Theilchen μ des Magneten wirkenden Kräfte

$$\mu A; \quad \mu B; \quad \mu C$$

und folglich die auf den ganzen Magneten ausgeübten

$$A\Sigma\mu; \quad B\Sigma\mu; \quad C\Sigma\mu.$$

Da sich nach unserer Hypothese im Magneten gleich viel positive und negative magnetische Flüssigkeit befindet, so sind diese drei Grössen $= 0$. Wären sie nicht $= 0$, so würde sich eine Ortsverschiebung des ganzen Magneten (wohl zu unterscheiden von einer Drehung um die Axe) ergeben. Wäre z. B. die senkrechte Componente nicht 0, so würde ein Stahlstäbchen, das man an eine Waage hängte und dann magnetisirte, sein Gewicht ändern. Das aber ist nicht der Fall. Ueberhaupt zeigt die Erfahrung, dass auf den Magneten keine Kraft ausgeübt wird, die eine Ortsveränderung desselben hervorbrächte. Hierin liegt der empirische Beweis, dass gleich viel positive und negative magnetische Flüssigkeit in einem Magneten enthalten ist.

Geben wir aber dem Magneten eine *freie Beweglichkeit um seinen Schwerpunkt*, so wird er durch den Erdmagnetismus um denselben gedreht werden; und zwar sind die Drehungsmomente der Componenten*)

$$\begin{aligned} &\text{um die } x\text{-Axe: } \Sigma(\mu y C - \mu z B) = \beta C - \gamma B \\ (1.)\quad &\text{um die } y\text{-Axe: } \Sigma(\mu z A - \mu x C) = \gamma A - \alpha C \\ &\text{um die } z\text{-Axe: } \Sigma(\mu x B - \mu y A) = \alpha B - \beta A. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtslage, die der Magnet unter dem Einfluss des Erdmagnetismus annehmen wird, ist also charakterisirt durch die Gleichungen

$$(2.)\quad \beta C - \gamma B = 0; \qquad \gamma A - \alpha C = 0; \qquad \alpha B - \beta A = 0;$$

und hieraus ergiebt sich:

$$(3.)\quad \begin{aligned} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} &= \frac{A}{R} \\ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} &= \frac{B}{R} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} &= \frac{C}{R}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Gleichgewichtslage des Magneten diejenige ist, bei der seine magnetische Axe die Richtung der Resultante der auf ihn wirkenden magnetischen Kräfte hat.

Kann der Magnet sich nur um eine vertikale Axe drehen (Compass) so bleibt nur die Bedingung

---

*) Vrgl. Seite 5, (7.). Es sind also in den vorstehenden Formeln (1.) die Grössen $\alpha = \Sigma\mu x$, $\beta = \Sigma\mu y$, $\gamma = \Sigma\mu z$ zu bezeichnen als die *magnetischen Momente* des betrachteten Magneten in Bezug auf die Coordinatenaxen.

(4.) $$\alpha B - \beta A = 0$$
für die Bestimmung seiner Gleichgewichtslage, wenn wir die Axe der z als die Vertikale annehmen. Wir bezeichnen den Winkel der Resultante R des Erdmagnetismus mit der Vertikalen mit ϑ', und den Winkel, den die y-Axe mit der durch R und die Vertikale gelegten Ebene bildet, mit φ'. Dann ist
$$B = R \sin\vartheta' \cos\varphi' \qquad A = R \sin\vartheta' \sin\varphi'.$$
Ferner nennen wir die Neigung der Hauptaxe des Magneten gegen die Vertikale ϑ, und bezeichnen mit φ den Winkel, den eine durch sie und die Vertikale gelegte Ebene mit der y-Axe einschliesst. Setzen wir alsdann, wie früher: $m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, so wird offenbar:
$$\alpha = m \sin\vartheta \sin\varphi \qquad \beta = m \sin\vartheta \cos\varphi\,.$$
Also ergiebt sich durch Einsetzen in die Gleichung (4.)

(5.) $$mR \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta' \cdot \sin(\varphi - \varphi') = 0$$
oder, da wir die speziellen Fälle, dass einer der beiden Winkel ϑ, ϑ' gerade $= 0$ sei, ausnehmen
$$\sin(\varphi - \varphi') = 0\,, \text{ d. i.: } \varphi = \varphi'.$$
Beim Gleichgewicht fallen also die magnetische Axe des Magneten und die Richtung der vom Erdmagnetismus ausgeübten Kraft in dieselbe vertikale Ebene.

Hierauf beruht die Methode zur Bestimmung der magnetischen Hauptaxe. Eine Compassnadel SN zeigt keineswegs (wie man gewöhnlich ganz ohne Grund annimmt) mit ihrer Spitze N die Richtung der magnetischen Kraft an. Vielmehr ist die magnetische Axe $\alpha\beta$ der Nadel vorläufig noch eine völlig *unbekannte* Richtung. Man finde. dieselbe sehr einfach dadurch, dass man die Nadel umkehrt, ihre obere Seite nach unten legt. Ihre neue Ruhelage ist diejenige, in der $\alpha\beta$ in seiner früheren Stellung liegt, die Nadel also etwa die Stellung $S'N'$ erhält. Die magnetische Axe liegt alsdann in der Mitte zwischen den beobachteten Lagen SN und $S'N'$. Um aber diese Correktion ausführen zu können, genügt die gewöhnliche Einrichtung der Nadeln nicht, sondern es ist eine sehr einfache Verbesserung nothwendig. Diese besteht darin, dass die Nadel auf beiden Seiten ein Hütchen hat, in dem sie sich auf der Spitze drehen kann; sodass man sie bald mittelst des einen, bald mittelst des anderen Hütchens auf die Spitze aufsetzen kann.

Ein ganz ähnliches Verfahren wendet man bei einem frei schwebenden Magneten an. Man hängt denselben mittelst einer Hülse auf, in die man ihn in verschiedenen Lagen hineinstecken kann. Dreht man ihn in dieser Hülse um 0°, 90°, 180° und 270° und beobachtet

man jedesmal seine Gleichgewichtslage, so erhält man aus diesen vier Beobachtungen Mittel zur Bestimmung der Lage der Hauptaxe. Das feinere Verfahren ist folgendes: Wegen der Luftströmungen u. s. w. wendet man sehr schwere Magnete an (Gauss fast nie solche unter 25 Pfund). Der Magnet hängt in einer Hülse, in der er frei drehbar ist; an einem Ende trägt er einen Spiegel S, der durch Stellschrauben verschiebbar ist. Auf diesen Spiegel ist ein Fernrohr mit einer Scala gerichtet, deren Spiegelbild man mit dem Fernrohr beobachtet. Man stellt den Spiegel so ein, dass man mit dem Fernrohr immer denselben Theilstrich der Scala sieht, in welcher Lage sich auch der Magnet in seiner Hülse befindet. Ist dies der Fall, so ist der Spiegel senkrecht gegen die Hauptaxe des Magneten.

§ 7.

Methode zur Bestimmung des magnetischen Moments und des Erdmagnetismus.

Um den Grundgedanken zu zeigen, der allen gebräuchlichen Methoden zur Bestimmung des magnetischen Moments eines Magneten und gleichzeitig zur Messung der horizontalen Componente des Erdmagnetismus zu Grunde liegt, behandeln wir nur eine dieser Methoden, nämlich die unter dem Namen der *Gauss'schen Methode* bekannte. Der Grundgedanke aller dieser Methoden rührt von *Poisson* her; aber Gauss hat das Verdienst, die Methode experimentell so ausgebildet zu haben, dass sie an Genauigkeit der Resultate jeder physikalischen oder astronomischen Beobachtungsmethode gleich kommt.

Die Methode besteht aus zwei getrennten Operationen. Man beobachtet zuerst die Schwingungsdauer des horizontal unter dem Einflusse des Erdmagnetismus schwingenden Magneten.

Darauf lässt man denselben Magneten (ruhend) auf einen zweiten um eine vertikale Axe frei beweglichen Magneten (Compassnadel) einwirken und beobachtet die Gleichgewichtslage, welche dieser letztere Magnet unter dem Einfluss des erstern und des Erdmagnetismus annimmt. Diese beiden Beobachtungen genügen, um die horizontale Componente des Erdmagnetismus und gleichzeitig das magnetische Moment des Magneten zu finden.

Erste Operation: Beobachtung der horizontalen Schwingung des Magneten. Nach § 6 ist das Drehungsmoment der Wirkung des Erdmagnetismus auf den Magneten in Bezug auf die vertikale Axe (die z-Axe) gleich

$$\alpha B - \beta A \tag{1.}$$

oder nach der ebenfalls in § 6 eingeführten Bezeichnung

$$(2.) \qquad Rm \sin\vartheta \sin\vartheta' \sin(\varphi - \varphi').$$

Der Ausdruck (1.) zeigt, dass die Drehung der magnetischen Axe von der x-Axe zur y-Axe als positiv angenommen ist; dagegen ist der Winkel φ und φ' in der entgegengesetzten Richtung gerechnet, da sie die Winkel der Projektionen von R und der magnetischen Axe mit der y-Axe sind. Um unsere Bezeichnungen in Uebereinstimmung zu bringen, wollen wir jetzt als *positiv* diejenige Drehung festsetzen, welche von der positiven y-Axe zur positiven x-Axe geht, d. i. (wie man sofort aus der Zeichnung sieht) diejenige Drehung, welche den Winkel φ vergrössert. Nach dieser Annahme ist das auf den Magneten wirkende Drehungsmoment

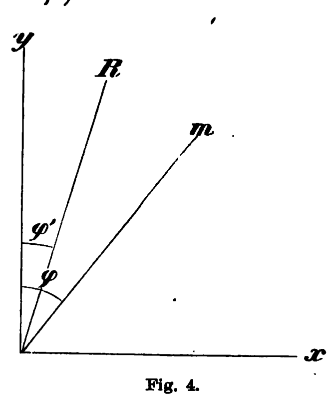


Fig. 4.

$$(2'.) \qquad Rm \sin\vartheta \sin\vartheta' \sin(\varphi' - \varphi);$$

und dieser Ausdruck zeigt, dass die Drehung positiv ist, wenn $\varphi < \varphi'$, negativ wenn $\varphi > \varphi'$, und dass Ruhe eintritt, wenn $\varphi = \varphi'$.

Nach der Theorie der Pendelbewegung gilt für die Schwingung des Magneten, wenn M sein Trägheitsmoment ist, die Differentialgleichung

$$(3.) \qquad M\frac{d^2\varphi}{dt^2} = Rm \sin\vartheta \sin\vartheta' \sin(\varphi' - \varphi).$$

Da der Magnet horizontal schwingen soll, so ist $\sin\vartheta = 1$; man erreicht aber in Wirklichkeit dies nie genau, und es ist daher $\sin\vartheta$ nur nahezu $= 1$, weshalb wir diesen Faktor als Correktion beibehalten. Es ist ferner $R\sin\vartheta'$ die horizontale Componente des Erdmagnetismus, die wir mit H bezeichnen. Endlich nehmen wir an, der Magnet entferne sich nur um sehr kleine Bogen aus dem Meridian, es sei also φ immer nur sehr wenig von φ' verschieden, so dass wir

$$\sin(\varphi - \varphi') = \sin\psi = \psi$$

setzen können, wo ψ die Ablenkung aus dem Meridian bedeutet. Bei wirklichen Beobachtungen giebt man in der That diesem Winkel ψ immer nur sehr kleine Werthe, wenige Grade oder Bruchtheile von Graden, da man dieselben mit Spiegelapparat u. s. w. mit ausserordentlicher Genauigkeit messen kann.

Hierdurch verwandelt sich die Gleichung (3.) in die folgende

$$(4.) \qquad M\frac{d^2\psi}{dt^2} = -Hm \sin\vartheta \cdot \psi$$

und daraus ergiebt sich unmittelbar für die Schwingungsdauer T

$$T\sqrt{\frac{Hm \sin \vartheta}{M}} = \pi$$

oder es ist

$$Hm = \frac{\pi^2 M}{T^2 \sin \vartheta}. \qquad (5.)$$

Durch diese Gleichung ist das Produkt Hm durch bekannte Grössen ausgedrückt, wenn noch ϑ und M durch vorgängige Beobachtungen bestimmt sind.

Vor *Poisson* hatte man nur diese Formel zur Bestimmung der Kraft des Erdmagnetismus. Man beobachtete die Schwingungsdauer desselben Magneten an verschiedenen Stellen (*Hansteen*). Abgesehen davon, dass diese Methode die Kraft nicht auf absolutes Maass zurückführt, trifft sie der Vorwurf, dass m sich sehr leicht ändert und man kein Mittel besitzt zu entscheiden, ob m sich geändert hat oder H; denn diese Kraft H ist keineswegs so constant wie die Intensität der Schwere. Solche Aenderungen des magnetischen Zustandes eines Magneten, also des Moments m, werden nicht allein durch Erschütterungen, Stösse u. s. w., die zu vermeiden sind, hervorgebracht, sondern auch durch Temperaturänderung und Umstände, die man nicht in seiner Gewalt hat. Den Einfluss der Temperaturvariation suchte man dadurch zu umgehen, dass man den Magneten vor Beginn der Beobachtungen wiederholt in die beiden äussersten Temperaturen brachte, zwischen denen beobachtet werden sollte; dadurch wird allerdings der magnetische Zustand constanter; aber man hat, wie gesagt, kein sicheres Mittel zu entscheiden, ob wirklich m constant geblieben ist; und auch hievon abgesehen würde die Anwendung dieser Methode immerhin abhängig sein von der Existenz eines bestimmten Normal-Magneten.

§ 8.

Fortsetzung.

Die zweite Operation: die Beobachtung des Ausschlags eines zweiten Magneten unter dem Einflusse des untersuchten, hat den Zweck, den angedeuteten Uebelstand zu vermeiden und H und m getrennt von einander zu bestimmen.

Es sei AB die magnetische Axe des untersuchten Magneten, und A_1B_1 die des unter seinem Einflusse aus dem Meridiane C_1y_1 abgelenkten Magneten, der sich um eine in C_1 senkrechte Axe z_1 frei bewegen kann. Wir bezeichnen die Entfernung der Mittelpunkte C und C_1 beider Magnete mit a und den dieser Entfernung entsprechenden Ausschlag des beweglichen Magneten mit ψ_1.

Zur Vervollständigung dieser Bezeichnungen ist noch Folgendes hinzuzufügen. Wir denken uns *zwei* einander parallele rechtwinklige

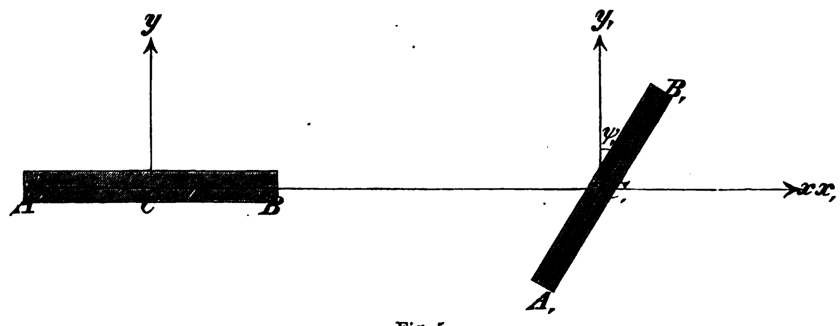


Fig. 5.

Coordinatensysteme xyz und $x_1 y_1 z_1$, deren Anfangspunkte resp. in C und C_1 liegen. Und zwar sollen die Axen z und z_1 vertikal, ferner die Ebenen yz und $y_1 z_1$ parallel dem magnetischen Meridian, endlich die Axen x und x_1 von der Richtung AB, oder (was dasselbe, vrgl. die Figur) von der Richtung CC_1 sein. Gleichzeitig beziehen wir ein Massentheilchen μ im festen Magneten auf die Coordinaten xyz, dagegen ein solches μ_1 im beweglichen auf $x_1 y_1 z_1$.

Bezeichnet E die Entfernung zwischen μ und μ_1, ist also

$$E^2 = (a + x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2,$$

so sind die von μ auf μ_1 ausgeübten Kraftcomponenten

$$X = \frac{\mu\mu_1 (a + x_1 - x)}{E^{n+1}}; \quad Y = \frac{\mu\mu_1 (y_1 - y)}{E^{n+1}}; \quad Z = \frac{\mu\mu_1 (z_1 - z)}{E^{n+1}}.$$

Wir nehmen dabei die bisher gemachte Voraussetzung, dass $n = 2$ sei, oder dass magnetische Massen nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung auf einander wirken, noch nicht als bewiesen an, sondern werden zeigen, wie dieses Gesetz experimentell bewiesen werden kann und bewiesen worden ist.

Das von diesen Kräften herrührende, auf den beweglichen Magneten wirkende Drehungsmoment um die Axe z_1 (oder die in C_1 senkrechte Drehungsaxe) ist im Sinne des wachsenden ψ_1:

$$y_1 X - x_1 Y.$$

Daher erhält man durch Bildung aller Componenten für die Ruhelage des abgelenkten Magneten die Gleichung

$$(1.) \quad \sum\sum \mu\mu_1 \left\{ \frac{y_1 (a + x_1 - x) - x_1 (y_1 - y)}{E^{n+1}} \right\} - Hm_1 \sin \vartheta_1 \sin \psi_1 = 0,$$

worin m_1 das magnetische Hauptmoment des beweglichen Magneten, ϑ_1 die Neigung seiner Hauptaxe gegen die Axe z_1 ist, und die beiden Summen über sämmtliche Elemente beider Magnete auszudehnen sind.

Durch Entwickelung nach $\frac{x_1 - x}{a}$, $\frac{y_1 - y}{a}$, $\frac{z_1 - z}{a}$ hat man, mit Vernachlässigung der Quadrate dieser Grössen,

$$(2.)\quad \frac{1}{E^{n+1}} = \frac{1}{\left[(a + x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)\right]^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{a^{n+1}}\left\{1 - (n+1)\frac{x_1 - x}{a}\right\}.$$

Es soll nämlich die Entfernung a im Verhältniss zu den Dimensionen des Magneten, also zu jedem möglichen Werthe von x, x_1, u. s. w. gross sein; ob im speziellen Falle die Vernachlässigung der Quadrate erlaubt ist, muss die weitere Durchführung der Entwickelung nach Potenzen zeigen.

Setzt man den Werth aus Gleichung (2.) in (1.) ein, so findet man, ebenfalls mit Vernachlässigung von x^2 und x_1^2 gegen a^2

$$(3.)\quad \frac{1}{a^{n+1}}\sum\sum\mu\mu_1\left\{y_1\Big((a + x_1 - x) - (n+1)(x_1 - x)\Big) - x_1(y_1 - y)\right\} - \\ - H m_1 \sin\vartheta_1 \sin\psi_1 = 0.$$

Wegen der angenommenen Lage der Coordinatenaxen ist aber

$$\Sigma\mu = 0; \quad \Sigma\mu y = 0; \quad \Sigma\mu z = 0; \quad \Sigma\mu x = m.$$

Folglich erhält man durch Ausführung der Summen nach μ (oder x, y und z), indem man berücksichtigt, dass dabei x_1, y_1 und z_1 als constant anzusehen sind,

$$(4.)\quad \frac{1}{a^{n+1}}\sum\mu_1 y_1\Big(-m + (n+1)m\Big) - H m_1 \sin\vartheta_1 \sin\psi_1 = 0$$

$$(4'.)\quad \text{d. i.:}\quad \frac{nm}{a^{n+1}}\Sigma\mu_1 y_1 - H m_1 \sin\vartheta_1 \sin\psi_1 = 0.$$

Es ist aber das magnetische Moment des beweglichen Magneten in Beziehung auf die im Meridian liegende y-Axe

$$\Sigma\mu_1 y_1 = m_1 \sin\vartheta_1 \cos\psi_1.$$

Folglich wird $\frac{n m m_1 \sin\vartheta_1 \cos\psi_1}{a^{n+1}} - H m_1 \sin\vartheta_1 \sin\psi_1 = 0$, d. i.

$$(5.)\quad \operatorname{tg}\psi_1 = \frac{nm}{a^{n+1}H}.$$

Ist wirklich $n = 2$, so muss

$$(6.)\quad \operatorname{tg}\psi_1 = \frac{2m}{a^3 H}$$

sein, oder es müssen sich die Tangenten der Ablenkungswinkel umgekehrt verhalten wie die Cuben der Entfernungen der beiden Magneten von einander. Durch Vergleichung dieses Gesetzes mit der Beobachtung für verschiedene Werthe von a wäre ein exakter Beweis

zu liefern, dass die Wirkung magnetischer Massen auf einander nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung stattfindet.

Es giebt aber noch ein anderes Mittel, n zu bestimmen, das *Gauss* angewandt hat. Derselbe hat durch diese äusserst sinnreiche Methode zuerst einen *strengen Beweis des Gesetzes geliefert, dass die Wirkung magnetischer Massen dem reciproken Quadrate der Entfernung proportional ist.* Giebt man dem Magneten statt der früheren Lage die in nebenstehender Figur angedeutete, d. h. legt man seine Axe senkrecht gegen den Meridian, und die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte b in den Meridian, so gilt statt der Gleichung (1.) folgende:

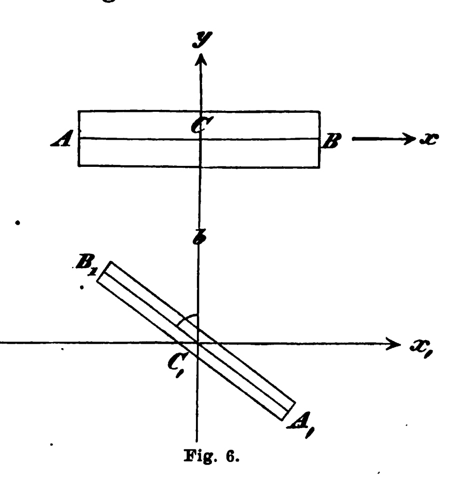


Fig. 6.

$$\sum\sum \mu\mu_1 \left\{ \frac{y_1(x_1 - x) - x_1(b + y_1 - y)}{E^{n+1}} \right\} - Hm_1 \sin \vartheta_1 \sin \psi_1 = 0.$$

Ausserdem ist in diesem Falle

$$\frac{1}{E^{n+1}} = \frac{1}{\left[(x_1 - x)^2 + (b + y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2\right]^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{b^{n+1}} \left\{ 1 - (n+1) \frac{y_1 - y}{b} \right\}.$$

Folglich hat man durch Einsetzen und Vernachlässigung von y^2 und y_1^2 gegen b^2

$$\frac{1}{b^{n+1}} \sum\sum \mu\mu_1 \left\{ y_1(x_1 - x) - x_1\Big((b + y_1 - y) - (n+1)(y_1 - y)\Big) \right\} - Hm_1 \sin\vartheta_1 \sin\psi_1 = 0$$

und durch Ausführung der Summe nach μ findet man, da, wie früher, $\Sigma\mu = 0$; $\Sigma\mu y = 0$; $\Sigma\mu z = 0$; $\Sigma\mu x = m$ ist, die Gleichung:

$$-\frac{m}{b^{n+1}} \Sigma\mu_1 y_1 - Hm_1 \sin\vartheta_1 \sin\psi_1 = 0$$

d. i.

$$-\frac{mm_1 \sin\vartheta_1 \cos\psi_1}{b^{n+1}} - Hm_1 \sin\vartheta_1 \sin\psi_1 = 0$$

(7.) d. i.

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{-m}{b^{n+1} H}.*)$$

Macht man $a = b$, so verhalten sich in beiden Fällen die Grössen der

*) Während also im vorhergehenden Falle der durch (6.) bestimmte Winkel ψ_1 *positiv* war (übereinstimmend mit Fig. 5); ergiebt sich im gegenwärtigen Falle aus (7.) ein *negativer* Werth von ψ_1 (was übereinstimmt mit der in Fig. 6 gegebenen Darstellung).

Ablenkungen wie $n:1$ (Gleichungen (5.) und (7.)); die Beobachtung ergiebt wie $2:1$; und hierin liegt der Beweis, dass $n = 2$ ist.

Fasst man jetzt die durch beide Theile der Beobachtungsmethode gelieferten Formeln (5.) § 7 und (6.) § 8 zusammen,

$$\frac{\pi^2 M}{T^2 \sin\vartheta} = Hm \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\psi_1 = \frac{2m}{a^3 H},$$

so erhält man schliesslich für die gesuchten Grössen H und m die Ausdrücke

$$H^2 = \frac{2\pi^2 M}{a^3 T^2 \sin\vartheta \operatorname{tg}\psi_1} \tag{8.}$$

$$m^2 = \frac{\pi^2 M a^3 \operatorname{tg}\psi_1}{2T^2 \sin\vartheta}. \tag{9.}$$

Dadurch sind beide Grössen auf absolutes Maass zurückgeführt und durch direkt zu beobachtende Grössen ausgedrückt. Die Intensität des Erdmagnetismus ist dadurch ebenso präcis bestimmt, wie die der Schwerkraft durch den Fallraum oder das Pendel.

Die Arbeit von *Gauss* über diesen Gegenstand (*intensitas vis magneticae terrestris*) findet sich in den Schriften der Göttinger Societät von 1833; das Studium derselben ist sehr zu empfehlen.

§ 9.

Potential eines magnetischen Moleküls auf ein anderes.

Die im letzten Paragraphen angestellte Betrachtung bezieht sich im Grunde auf zwei magnetische Moleküle, da wir die Quadrate der Dimensionen vernachlässigt haben. Begnügen wir uns aber mit der Herleitung der Formeln für Moleküle, so gelangen wir weit einfacher zu demselben Ziele, wenn wir, statt von den Componenten der ausgeübten Kraft, von dem Potential des ruhenden magnetischen Moleküls auf das bewegliche ausgehen.

Wir nennen die Coordinaten des Mittelpunktes des festen Moleküls xyz, die des Mittelpunktes des beweglichen abc, die eines Massentheilchens μ_1 im letztern bezogen auf den Mittelpunkt desselben $x_1 y_1 z_1$, also die absoluten Coordinaten des Theilchens $a + x_1$, $b + y_1$, $c + z_1$. Ferner bezeichnen wir mit E die Entfernung der beiden Mittelpunkte von einander, und mit ϱ die Entfernung des Theilchens μ_1 vom Mittelpunkte xyz des festen Moleküls, d. h. wir setzen

$$\varrho^2 = (a + x_1 - x)^2 + (b + y_1 - y)^2 + (c + z_1 - z)^2$$
$$E^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2.$$

Endlich behalten wir die Zeichen m, m_1, ϑ, ϑ_1, ψ, ψ_1 in der bisherigen Bedeutung bei und nennen die Werthe der magnetischen Momente nach den 3 Coordinatenaxen α, β, γ, α_1, β_1, γ_1.

Nach der Formel (9.) § 4 ist das Potential des festen Moleküls auf das Theilchen μ_1

$$\mu_1 V_{x_1 y_1 z_1} = \mu_1 \left\{ \alpha \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z} \right\}$$

und durch Entwickelung nach Potenzen von x_1, y_1 und z_1

$$\mu_1 V_{x_1 y_1 z_1} = \mu_1 \left\{ V_{abc} + x_1 \frac{\partial V_{abc}}{\partial a} + y_1 \frac{\partial V_{abc}}{\partial b} + z_1 \frac{\partial V_{abc}}{\partial c} \right\}.$$

Hier bezeichnet V_{abc} den Werth des Potentials des festen Moleküls auf den Mittelpunkt abc des beweglichen Moleküls, d. i. den Werth von $V_{x_1 y_1 z_1}$ für $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, so dass also

$$V_{abc} = \alpha \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial z}$$

ist. Folglich wird das Potential des festen Moleküls auf das ganze bewegliche Molekül

$$V = \sum \mu_1 V_{x_1 y_1 z_1} = \alpha_1 \frac{\partial V_{abc}}{\partial a} + \beta_1 \frac{\partial V_{abc}}{\partial b} + \gamma_1 \frac{\partial V_{abc}}{\partial c}$$

und durch Einsetzen des Werthes von V_{abc}

$$(1.)\quad V = \alpha_1 \frac{\partial \left\{ \alpha \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial z} \right\}}{\partial a} + \beta_1 \frac{\partial \left\{ \alpha \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial z} \right\}}{\partial b}$$
$$+ \gamma_1 \frac{\partial \left\{ \alpha \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial z} \right\}}{\partial c}$$

oder

$$(2.)\quad V = \alpha_1 \left\{ \alpha \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial a \cdot \partial x} + \beta \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial a \cdot \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial a \cdot \partial z} \right\}$$
$$+ \beta_1 \left\{ \alpha \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial b \cdot \partial x} + \beta \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial b \cdot \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial b \cdot \partial z} \right\}$$
$$+ \gamma_1 \left\{ \alpha \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial c \cdot \partial x} + \beta \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial c \cdot \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial c \cdot \partial z} \right\}.$$

Diese allgemeine Gleichung vereinfachen wir dadurch, dass wir die frühere spezielle Voraussetzung eintreten lassen, dass die x-Axe mit der magnetischen Axe des festen Moleküls zusammenfalle, dass also

$$\alpha = m; \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0.$$

Dann ist

$$(3.)\quad V = m \left\{ \alpha_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial a \cdot \partial x} + \beta_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial b \cdot \partial x} + \gamma_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{E}}{\partial c \cdot \partial x} \right\}.$$

Nach der früheren Bezeichnung ist

$$\alpha_1 = m_1 \sin \vartheta_1 \sin \psi_1 ; \quad \beta_1 = m_1 \sin \vartheta_1 \cos \psi_1 ; \quad \gamma_1 = m_1 \cos \vartheta_1$$

und durch Einführung derselben wird die Gleichung (3.), wenn man zugleich die angedeuteten Differentiationen ausführt,

$$(4.)\ V = m m_1 \left\{ \left(\frac{1}{E^3} - \frac{3(a-x)^2}{E^5} \right) \sin \vartheta_1 \sin \psi_1 - 3 \frac{(a-x)(b-y)}{E^5} \sin \vartheta_1 \cos \psi_1 - 3 \frac{(a-x)(c-z)}{E^5} \cos \vartheta_1 \right\}.$$

Nehmen wir nun das bewegliche Molekül um eine durch seinen Mittelpunkt abc der z-Axe parallel gelegte Axe drehbar an, so ist das diesem Potential angehörige Drehungsmoment um diese Axe: $-\frac{\partial V}{\partial \psi_1}$. Denken wir uns ferner die z-Axe vertikal, und die zy-Ebene parallel dem magnetischen Meridian, so wird der Erdmagnetismus auf dieses drehbare Molekül das Drehungsmoment ausüben: $-Hm_1 \sin \vartheta_1 \sin \psi_1$, (ebenso wie früher Seite 18). Folglich gilt für die Ruhelage des Moleküls die Gleichung

$$(5.)\qquad \frac{\partial V}{\partial \psi_1} + Hm_1 \sin \vartheta_1 \sin \psi_1 = 0$$

und diese wird durch Einsetzen von V aus Gleichung (4.)

$$(5'.)\ m \left\{ \left(\frac{1}{E^3} - 3 \frac{(a-x)^2}{E^5} \right) \cos \psi_1 + 3 \frac{(a-x)(b-y)}{E^5} \sin \psi_1 \right\} - H \sin \psi_1 = 0.$$

Diese Gleichung wenden wir an auf die beiden in § 8 behandelten Fälle. In beiden befanden sich die Magnete in derselben horizontalen Ebene, es ist also in beiden $z = c$. Im ersten Falle liegt ferner der Mittelpunkt des beweglichen Moleküls in der Hauptaxe des festen, es ist also $b = y$; für diesen Fall ist also: $E = a - x$; und es verwandelt sich die Gleichung (5'.) in die folgende

$$\frac{2m}{E^3} \cos \psi_1 - H \sin \psi_1 = 0$$

$$(6.)\ \text{oder} \qquad \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{2m}{E^3 H}.$$

Im zweiten Falle liegt der Mittelpunkt beider Moleküle im Meridian, es ist also $a = x$ und $E^2 = (b-y)^2$; folglich geht die Gleichung (5'.) über in

$$-\frac{m}{E^3} \cos \psi_1 - H \sin \psi_1 = 0$$

$$(7.)\ \text{d. i.} \qquad \operatorname{tg} \psi_1 = -\frac{m}{E^3 H}.$$

Beide Formeln (6.) und (7.) stimmen mit den Formeln (6.) und (7.) § 8 vollkommen überein.

§ 10.

Potential eines endlichen Magneten auf einen Punkt ausserhalb oder innerhalb.

Das Potential eines endlichen Magneten besteht aus einer Summe von Ausdrücken der Form

$$\alpha_n \frac{\partial \frac{1}{\varrho_n}}{\partial x} + \beta_n \frac{\partial \frac{1}{\varrho_n}}{\partial y} + \gamma_n \frac{\partial \frac{1}{\varrho_n}}{\partial z},$$

deren jeder das Potential eines im Magneten enthaltenen Moleküls bezeichnet. In demselben sind x, y, z die Coordinaten dieses Moleküls, $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ seine Momente nach den Coordinatenaxen und ϱ_n seine Entfernung von dem Punkte ausserhalb, auf den das Potential gesucht wird, dessen Coordinaten wir mit a, b, c bezeichnen.

Um diese Summe in ein Integral zu verwandeln, stellen wir folgende Betrachtung an. An der Stelle xyz construiren wir ein räumliches Element, das wir mit ω bezeichnen. In demselben befindet sich eine grosse Anzahl magnetischer Moleküle; die Lage der Hauptaxe derselben, mithin die Werthe der drei magnetischen Momente werden bei denselben im Allgemeinen verschieden sein; dagegen gehört allen dasselbe ϱ an, weil sie sich in dem äusserst kleinen Volum ω befinden. Das Potential dieses Elementes ω ist also

$$(1.)\quad \begin{aligned} &\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z} \\ +\, &\alpha_2 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\, &\alpha_n \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta_n \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \gamma_n \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}, \end{aligned}$$

wo n die Anzahl der im Elemente ω enthaltenen magnetischen Moleküle bedeutet. Das arithmetische Mittel aus allen n Werthen der α sei α_0, ebenso das der β β_0 und das der γ γ_0. Dann ist

$$(2.)\quad \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots \alpha_n &= n\alpha_0 \\ \beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots \beta_n &= n\beta_0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots\cdots \gamma_n &= n\gamma_0. \end{aligned}$$

Ist ferner k die Anzahl der magnetischen Moleküle in der Volumeinheit, so ist

$$n = k\omega$$

Setzt man also: $k\alpha_0 = \alpha$; $k\beta_0 = \beta$; $k\gamma_0 = \gamma$; so wird:

$$(2'.)\quad \begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n &= k\omega \cdot \alpha_0 = \alpha\omega, \\ \beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots + \beta_n &= k\omega \cdot \beta_0 = \beta\omega, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots\cdots + \gamma_n &= k\omega \cdot \gamma_0 = \gamma\omega, \end{aligned}$$

folglich das Potential der im Raumelemente ω enthaltenen Moleküle

$$(3.)\quad \omega\left\{\alpha \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}\right\}$$

und das Potential des ganzen Magneten

$$(4.)\quad Q = \sum \omega\left\{\alpha \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}\right\}.$$

Diese Summe verwandelt sich sofort in ein bestimmtes Integral, wenn die Grössen α, β und γ irgend einem stetigen Gesetze der Aenderung mit der Lage von ω folgen. Alsdann wird nämlich $\omega = dx\, dy\, dz$ und

$$(5.)\quad Q = \iiint dx\, dy\, dz \left\{\alpha \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z}\right\}.$$

wo die Integration über den ganzen Magneten auszudehnen ist.

Die Bedeutung der Grössen α, β, γ ergiebt sich leicht daraus, dass $\alpha\, dx\, dy\, dz$ das magnetische Moment des Raumelements ist, also $\iiint \alpha\, dx\, dy\, dz$, über den ganzen Raum v des Körpers ausgedehnt, das magnetische Moment der in dem ganzen Raume v enthaltenen Moleküle; folglich wäre, α constant gesetzt, αv das Moment von v und α das der Einheit des Volums, diese erfüllt gedacht mit der im Elemente $dx\, dy\, dz$ stattfindenden Vertheilung, also in magnetischer Hinsicht vollkommen homogen gedacht. Es sind daher α, β, γ die magnetischen Momente der Volumeinheit nach den Coordinatenrichtungen, wenn man sich die Volumeinheit mit der im Elemente des Volums stattfindenden Vertheilung erfüllt denkt.

§ 11.

Potential einer gleichförmig magnetisirten Kugel.

Von dem Ausdrucke für das Potential eines endlichen Magneten (Gleichung (5.) § 10) machen wir eine spezielle Anwendung auf *den Fall, dass der Magnet* eine gleichförmig magnetisirte Kugel ist, dass also an jeder Stelle desselben α, β und γ denselben Werth haben. Wir werden später zeigen, dass ein solcher Zustand nicht allein denkbar ist, sondern dass wir sogar in unserer Gewalt haben, ihn herzustellen. Siehe § 18.

In diesem Falle ist die Integration des Ausdruckes

$$(1.)\ Q = \alpha \iiint dx\,dy\,dz \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + \beta \iiint dx\,dy\,dz \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y} + \gamma \iiint dx\,dy\,dz \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z},$$

in welchem die Integrale über den ganzen Raum der Kugel, deren Radius R, auszudehnen sind, leicht ausführbar. Es genügt, den Werth von

$$\iiint dx\,dy\,dz \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x}$$

zu suchen. Man hat durch Ausführung der Integration nach x

$$\iiint dx\,dy\,dz \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} = \iint dy\,dz \left\{ \frac{1}{\varrho_\beta} - \frac{1}{\varrho_\alpha} \right\},$$

wenn α und β die zwei Punkte sind, in denen eine x-Coordinate die Oberfläche der Kugel schneidet, und ϱ_β und ϱ_α die Entfernungen dieser beiden Punkte α und β von dem Punkte P oder abc bezeichnen, auf den das Potential gesucht wird.

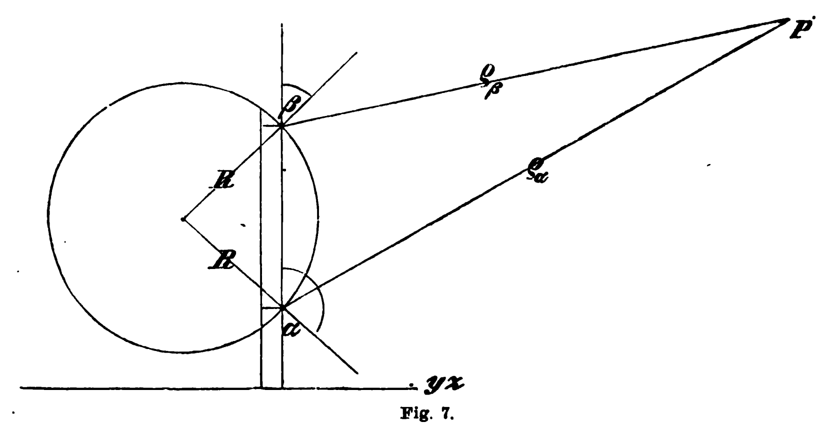


Fig. 7.

Nennen wir das Oberflächenelement der Kugel do und bezeichnen mit (R,x) den Winkel, den der nach Aussen gerechnete Radius mit der Richtung der positiven x bildet*), so ist

für jede Stelle β $\quad dy\,dz = do \cos(R,x)$
dagegen für jede Stelle α $\quad dy\,dz = -do \cos(R,x)$.

Dadurch wird das über die ganze Kugeloberfläche auszudehnende Integral

*) Diese Richtung der positiven x-Axe ist in der Figur vertikal *nach Oben* laufend zu denken.

$$\iint dy\, dz \left\{\frac{1}{\varrho_\beta} - \frac{1}{\varrho_\alpha}\right\} = \int \frac{do \cos(R, x)}{\varrho_\beta} + \int do\, \frac{\cos(R,x)}{\varrho_\alpha}$$

und hier ist das erste Integral rechter Hand über die nach der positiven x-Richtung gelegene Hälfte der Kugelfläche auszudehnen, das zweite über die andere Hälfte. Also wird:

$$\iiint dx\, dy\, dz\, \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} = \iint dy\, dz \left\{\frac{1}{\varrho_\beta} - \frac{1}{\varrho_\alpha}\right\} = \int \frac{do \cos(R, x)}{\varrho},$$

wenn wir das letzte Integral über die gesammte Oberfläche der Kugel ausdehnen.

Bemerken wir nun, dass die Integration der beiden übrigen Theile von Q die entsprechenden Ausdrücke liefern wird, so finden wir, dass

$$Q = \int do \left\{\frac{\alpha \cos(R, x) + \beta \cos(R, y) + \gamma \cos(R, z)}{\varrho}\right\}$$

ist, wenn das Integral über die ganze Kugelfläche genommen wird. Bezeichnen wir mit (m, x), (m, y) und (m, z) die Winkel, unter denen die magnetische Axe der Kugel gegen die Coordinatenaxen geneigt ist; setzen wir also

$$\cos(m, x) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}; \qquad \cos(m, y) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}};$$

$$\cos(m, z) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

so ergiebt sich

$$Q = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \int \frac{do}{\varrho} \left\{\cos(m,x)\cos(R,x) + \cos(m,y)\cos(R,y) + \cos(m,z)\cos(R,z)\right\}$$

oder

$$(3.) \qquad Q = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \int \frac{do \cos(m, R)}{\varrho},$$

wo (m, R) der Winkel ist, den der Radius R des Elementes do mit m, d. i. mit der Richtung der magnetischen Axe bildet.

In dieser Gleichung liegt eine Bestätigung eines allgemeinen Satzes aus der Theorie der Anziehung, der darin besteht, *dass man die Wirkung von Massen innerhalb einer Oberfläche auf einen Punkt ausserhalb derselben ersetzt denken kann durch eine bestimmte Massenvertheilung auf der Oberfläche selbst.* In diesem Falle ist nach der Gleichung (3.) die auf dem Oberflächenelement do vorhandene Masse

$$(4.) \qquad = do \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos(m, R).$$

Um von dieser Massenbelegung eine anschauliche Vorstellung zu erhalten, denke man sich die Kugel in der Richtung ihrer magnetischen Axe *m*, welche etwa *vertikal nach Oben* laufen mag, um eine unendlich kleine Strecke δ verschoben, und den von der Kugel*oberfläche* bei dieser Verschiebung beschriebenen *schalenförmigen Raum* mit homogener Masse von der Dichtigkeit $\pm\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}{\delta}$ erfüllt, und zwar der Art, dass diese Dichtigkeit im *obern* Theil des schalenförmigen Raumes *positiv*, im *untern* hingegen *negativ* ist. Die in solcher Weise construirte, die gegebene Kugel umhüllende Massenschicht wird alsdann die gesuchte sein, nämlich diejenige, welche durch die Formel (4.) dargestellt ist.

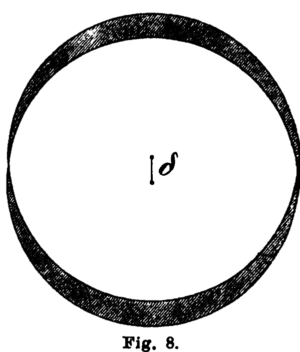


Fig. 8.

Zur Berechnung des Werthes von Q aus Gleichung (3.) führen wir Polarcoordinaten ein, zu deren Axe wir die vom Kugelmittelpunkte nach dem gegebenen Punkte $P\,(abc)$ laufende Linie E wählen. Dann ist nach der gewöhnlichen Bezeichnung

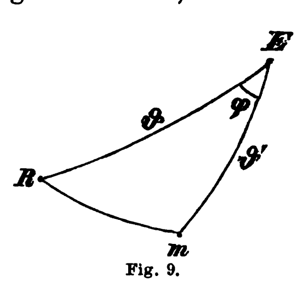


Fig. 9.

$$\cos(m,R) = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi$$

$$do = R^2\sin\vartheta d\vartheta\, d\varphi$$

$$\rho^2 = E^2 + R^2 - 2\,ER\cos\vartheta,$$

folglich ist

$$Q = R^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,\{\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi\}}{\sqrt{E^2+R^2-2\,ER\cos\vartheta}},\text{ d. i.}$$

$$(5.)\qquad Q = 2\,\pi R^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\cos\vartheta'\int_0^{\pi}\frac{d\vartheta\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{E^2+R^2-2\,ER\cos\vartheta}}.$$

Die weitere Ausführung der Integration ist verschieden, je nachdem der Punkt P ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt. Und zwar wird dabei wesentlich zu beachten sein, dass die Wurzel, welche die Entfernung zweier Punkte angiebt, immer positiv zu nehmen ist.

Für den Fall, dass P ausserhalb liegt, dass also $E > R$ ist, erhalten wir durch partielle Integration

$$Q = 2\pi R^2 \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cdot \cos\vartheta' \left[\frac{\cos\vartheta \sqrt{E^2+R^2-2ER\cos\vartheta}}{ER} + \frac{1}{3}\frac{(\sqrt{E^2+R^2-2ER\cos\vartheta})^3}{E^2R^2}\right]_0^\pi$$

(6.) d. i. $$Q = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cdot \cos\vartheta'}{E^2}.$$

Die Bedeutung dieses Ausdruckes ist, *dass die Kugel auf einem äusseren Punkte so wirkt, wie ein in ihrem Mittelpunkte befindliches magnetisches Molekül, dessen Momente* $\frac{4}{3}\pi R^3 \alpha$, $\frac{4}{3}\pi R^3 \beta$, $\frac{4}{3}\pi R^3 \gamma$ *sind.* Zur Vergleichung mit dem Ausdrucke für das Potential eines magnetischen Moleküls (Gleichung (9.), § 4) führen wir wieder rechtwinklige Coordinaten ein. Dann wird:

$$E^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2.$$

$$\cos\vartheta' = \frac{\alpha(a-x) + \beta(b-y) + \gamma(c-z)}{E\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

(6'.) mithin: $$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \left\{\frac{\alpha(a-x) + \beta(b-y) + \gamma(c-z)}{E^3}\right\}$$

(7.) d. i.: $$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \left\{\alpha \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{E}}{\partial z}\right\}$$

und diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (9.), § 4 überein. Damit ist der ausgesprochene Satz bewiesen.

Ist aber $E < R$, *d. h. liegt* P *im Innern der Kugel,* so erhalten wir, (indem wir bei der Einführung der Grenzen die Wurzel immer positiv zu nehmen haben) den Werth:

(8.) $$Q = \frac{4}{3}\pi E \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cdot \cos\vartheta'$$

und wenn wir dies nach den obigen Formeln auf rechtwinklige Coordinaten beziehen,

(9.) $$Q = \frac{4}{3}\pi \{\alpha(a-x) + \beta(b-y) + \gamma(c-z)\}.$$

In dieser Gleichung liegt das bemerkenswerthe Resultat, dass die Wirkung der magnetischen Kugel auf jede Stelle in ihrem Innern dieselbe ist. Denn aus derselben folgen durch Differentiation nach a, b, c, den Coordinaten des Punktes P, folgende Ausdrücke für die Componenten der Kraft

(10.) $$X = -\frac{\partial Q}{\partial a} = -\frac{4}{3}\pi\alpha$$
$$Y = -\frac{\partial Q}{\partial b} = -\frac{4}{3}\pi\beta$$
$$Z = -\frac{\partial Q}{\partial c} = -\frac{4}{3}\pi\gamma.$$

Es wird also ein Massentheilchen $+\mu$ mit der Kraft $\frac{4}{3}\pi\alpha\mu$ in der negativen Richtung getrieben*), und ein anderes $-\mu$ mit derselben

*) D. h. in der negativen Richtung der x-Axe.

Kraft in der positiven; folglich geht die Wirkung dieser Kräfte dahin, jedes Molekül im Innern in einen Magneten zu verwandeln, seine magnetischen Flüssigkeiten in der Richtung der magnetischen Axe zu trennen, aber so, dass die Vertheilung die entgegengesetzte werde von der im Magneten vorhandenen. Hieraus geht hervor, dass ein solcher magnetischer Zustand, wie wir ihn in der Kugel vorausgesetzt haben, gar nicht ohne äussere Kräfte bestehen kann.

Aus unsern Formeln ergiebt sich unmittelbar *das Potential einer gleichförmig magnetisirten Kugelschale* auf einen Punkt ausserhalb oder innerhalb derselben oder im Innern ihrer Masse selbst. Die Kugelschale sei begrenzt von zwei concentrischen Kugeln, deren Radien R_1 und R_2 sind. Denkt man sich auch die innere Kugel in derselben Weise mit homogen magnetischer Masse erfüllt, so ergiebt sich unmittelbar, dass das Potential der Kugelschale

$$Q = Q_1 - Q_2 \tag{11.}$$

ist, wenn Q_1 das unter dieser Annahme berechnete Potential der grösseren Kugel R_1, und Q_2 das der kleineren R_2 ist.

Liegt der Punkt P ausserhalb der Kugelschale, so ist durch Anwendung der Gleichung (7.) und Gleichung (11.)

$$Q = \tfrac{4}{3}\pi\,(R_1^3 - R_2^3)\left\{\alpha\,\frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial\frac{1}{E}}{dy} + \gamma\,\frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial z}\right\}. \tag{12.}$$

Liegt P im inneren Hohlraum der Kugelschale, so ergiebt die Gleichung (8.) *für Q_1 und Q_2 denselben Werth; also ist für diesen Fall*

$$Q = 0, \tag{13.}$$

d. h. eine gleichförmig magnetisirte Kugelschale verhält sich in Beziehung auf einen inneren Punkt wie eine homogen mit gravitirender Masse erfüllte; ihre Wirkung ist auf jeden innern Punkt = 0.

Liegt endlich der Punkt P im Innern der Masse der Kugelschale, so ergiebt sich ebenso aus Gleichung (6.) und (8.) für das Potential auf denselben

$$Q = \tfrac{4}{3}\pi\,\frac{E^3 - R_2^3}{E^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\,.\cos\vartheta', \tag{14.}$$

oder auf rechtwinklige Coordinaten bezogen:

$$\begin{aligned} Q &= \tfrac{4}{3}\pi\,\frac{E^3 - R_2^3}{E^3}\left\{\alpha\,(a-x) + \beta\,(b-y) + \gamma\,(c-z)\right\} \\ &= \tfrac{4}{3}\pi\,(E^3 - R_2^3)\left\{\alpha\,\frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial x} + \beta\,\frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial y} + \gamma\,\frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial z}\right\}, \end{aligned} \tag{14'.}$$

wo also R_2 den Radius der *innern* Begrenzungsfläche der Schale vorstellt.

§ 12.

Allgemeine Differentialgleichungen zur Bestimmung der magnetischen Momente aus den gegebenen constanten magnetisirenden Ursachen.

Aehnlich würden wir in jedem anderen Falle nach der allgemeinen Gleichung (5.) § 10 das Potential eines Magneten berechnen können, wenn wir α, β, γ kennten oder ihre Werthe aus den gegebenen magnetisirenden Ursachen abgeleitet hätten. Unsere Aufgabe besteht also zunächst darin, Relationen zwischen den magnetischen Momenten und den magnetischen Kräften, die dieselben hervorbringen, zu finden, oder allgemeine Differentialgleichungen abzuleiten, aus denen in speziellen Fällen die magnetischen Momente gefunden und daraus das Potential abgeleitet werden könnte.

Es ist ein magnetisirbarer homogener Körper im unmagnetischen Zustande gegeben. Er tritt unter die Wirkung einer magnetischen Kraft R, deren Componenten nach den Coordinatenrichtungen X, Y, Z sind. Diese sind Funktionen der Lage des Theilchens xyz, auf welches sie wirken. Durch diese Kräfte wird ein magnetischer Zustand hervorgebracht, d. h. ein Zustand, in dem die magnetischen Momente α, β, γ bestimmte Werthe annehmen. Es sollen nun diese Werthe bestimmt werden aus den gegebenen Kräften X, Y, Z und den Wirkungen A, B, C der übrigen Theile des Körpers, die durch X, Y, Z magnetisch geworden sind.

Da der Körper durch seine ganze Masse homogen ist, so müssen α, β, γ stetige Funktionen der Coordinaten x, y, z sein. Wir können uns also um einen beliebigen Punkt xyz des Körpers immer eine Kugel beschrieben denken, die so klein ist, dass innerhalb derselben die magnetischen Momente constant sind.

Diese Kugel ist also ein kleiner Magnet (wie wir ihn im letzten Paragraphen betrachtet haben), in welchem der Werth und die Richtung des magnetischen Hauptmoments an jeder Stelle dieselben sind; *es kann daher kein Zweifel sein, dass die Richtung ihrer magnetischen Hauptaxe zusammenfällt mit der Richtung der Resultante der auf die Stelle xyz wirkenden äussern Kräfte*, dass also, welchen Werth auch die magnetischen Momente α, β, γ haben mögen, die Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{aligned} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} &= \frac{X+A}{\sqrt{(X+A)^2+(Y+B)^2+(Z+C)^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} &= \frac{Y+B}{\sqrt{(X+A^2)+(Y+B)^2+(Z+C)^2}} \\ \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} &= \frac{Z+C}{\sqrt{(X+A^2)+(Y+B)^2+(Z+C)^2}} \end{aligned}$$

bestehen müssen.

Weniger sicher als diese Annahme ist die Hypothese, *dass der Werth des magnetischen Hauptmoments der kleinen Kugel proportional der Resultante der auf sie wirkenden äusseren Kräfte sei, dass also, wenn p eine Constante,*

$$(2.)\quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\beta^2} = \sqrt{(X+A)^2+(Y+B)^2+(Z+C)^2}.$$

Diese Vorstellung wäre wohl kaum anfechtbar, wenn es feststünde, dass (ebenso wie bei der Elektricität) eine unerschöpfliche Quelle magnetischer Flüssigkeiten vorhanden sei, dass also eine magnetische Kraft gleiche inducirende Wirkung auf den gegebenen Körper ausübt, gleichgültig ob schon andere magnetische Kräfte auf denselben wirken, oder nicht. Hierüber sind wir aber im Unklaren. Vielmehr ist das Missliche einer solchen Vergleichung des Magnetismus mit der Elektricität nicht zu verkennen und erhellt namentlich aus folgender Vorstellung über die Natur des Magnetismus, die nicht weniger wahrscheinlich ist als die früher (§ 3) besprochene. Es soll nach derselben jedes Eisenmolekül schon im natürlichen Zustande ein wirklicher Magnet sein, und der unmagnetische Zustand vom magnetischen sich nur dadurch unterscheiden, dass im ersteren die magnetischen Axen der einzelnen Moleküle alle möglichen Richtungen haben und keinem bestimmten Gesetze folgen, dass dagegen im magnetischen Zustande eine Richtung der magnetischen Axen über die anderen vorwiegt. Ist diese Vorstellung richtig, so giebt es eine Grenze der Magnetisirung, und diese tritt einfach dann ein, wenn alle Molekülaxen dieselbe Richtung haben. Die Richtigkeit jener Hypothese (2.) ist also ein sehr zweifelhafter Punkt. Einige Beobachtungen, die *Neumann* aber nicht für sehr zuverlässig und genügend hält, machen es sogar wahrscheinlich, dass p nicht constant sei. Die Prüfung, ob p constant ist, kann streng nicht anders vorgenommen werden, als nach Entwickelung der auf diese Hypothese gegründeten Theorie. Wir werden daher auf diesen Punkt zurückkommen, wenn wir im Besitz der Methoden der Beobachtung sein werden. Im schlimmsten Falle gilt die Theorie nur innerhalb gewisser Grenzen, die jedesmal durch das Experiment festzustellen sind.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) ergiebt sich

$$(3.)\quad \alpha = p\,(X+A);\qquad \beta = p\,(Y+B);\qquad \gamma = p\,(Z+C).$$

Die äusseren magnetischen Kräfte X, Y, Z lassen sich immer durch die negativen partiellen Differentialquotienten eines Potentials nach den Coordinaten des betrachteten Punktes, des Mittelpunktes der kleinen Kugel darstellen;

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Die übrigen Kräfte A, B, C rühren her von dem Potentiale des ganzen magnetisirten Körpers mit Ausnahme der kleinen Kugel, die sich an der betrachteten Stelle xyz befindet. Bezeichnen wir das Potential des ganzen Körpers auf xyz mit Q und das der kleinen Kugel auf ebendenselben (in ihrem Centrum gelegenen) Punkt xyz mit q, so ist

$$A = -\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\right\}; \quad B = -\left\{\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y}\right\}; \quad C = -\left\{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z}\right\}$$

oder nach den Gleichungen (10.) § 11*)

$$A = -\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{4}{3}\pi\alpha\right\}; \quad B = -\left\{\frac{\partial Q}{\partial y} - \tfrac{4}{3}\pi\beta\right\}; \quad C = -\left\{\frac{\partial Q}{\partial z} - \tfrac{4}{3}\pi\gamma\right\}.$$

Ferner werden die Gleichungen (3.)

$$(3'.) \quad \begin{aligned} \alpha &= -p\left\{\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{4}{3}\pi\alpha\right\} \\ \beta &= -p\left\{\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} - \tfrac{4}{3}\pi\beta\right\} \\ \gamma &= -p\left\{\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} - \tfrac{4}{3}\pi\gamma\right\} \end{aligned}$$

oder wenn wir zur Abkürzung

$$(4.) \quad \frac{p}{1 - \tfrac{4}{3}\pi p} = \varkappa$$

schreiben

$$(5.) \quad \begin{aligned} \alpha &= -\varkappa\left\{\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right\} \\ \beta &= -\varkappa\left\{\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right\} \\ \gamma &= -\varkappa\left\{\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z}\right\}. \end{aligned}$$

Hierin ist nach Formel (5.) § 10

$$(6.) \quad Q = \iiint dx_1\, dy_1\, dz_1 \left\{\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z_1}\right\},$$

wenn wir die variabelen Coordinaten eines Punktes im Körper mit $x_1\, y_1\, z_1$ bezeichnen und die Integrationen über den ganzen Körper ausdehnen; α_1, β_1, γ_1 sind die magnetischen Momente des an der

---

*) Wir haben uns nämlich die um xyz beschriebene Kugel so klein gedacht, dass die magnetischen Momente $\alpha\beta\gamma$ innerhalb derselben als *constant* zu betrachten sind. Die von einer solchen Kugel auf einen Punkt im Innern ausgeübten Componenten haben aber nach (10.) Seite 27 die *constanten* Werthe $-\tfrac{4}{3}\pi\alpha$, $-\tfrac{4}{3}\pi\beta$, $-\tfrac{4}{3}\pi\gamma$. Und dies werden daher z. B. auch die Werthe der auf den *Mittelpunkt* xyz ausgeübten Componenten $-\frac{\partial q}{\partial x}$, $-\frac{\partial q}{\partial y}$, $-\frac{\partial q}{\partial z}$ sein.

Stelle $x_1 y_1 z_1$ liegenden Elements, und ϱ ist die Entfernung desselben vom Punkte xyz, also

(6'.) $$\varrho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Dies sind die Gleichungen, aus denen α, β, γ zu berechnen sind. In dieser Form hat die Aufgabe etwas abschreckendes. Sie wird aber sehr erleichtert durch die Bemerkung, dass α, β, γ [vergl. (5.)] die partiellen Differentialquotienten einer und derselben Funktion sind, die allerdings noch unbestimmt ist, dass also

(7.) $$\alpha = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \beta = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \gamma = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Setzt man dies in die Gleichungen (5.), so ergiebt sich*)

(8.) $$\varphi + V + Q = 0$$

und hierin ist nach der Gleichung (6.)

(8'.) $$Q = \varkappa \iiint dx_1\, dy_1\, dz_1 \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z_1} \right\},$$

wenn φ_1 dieselbe Funktion von $x_1 y_1 z_1$ ist, die φ von xyz ist.

Dieses 3fache Integral über die ganze räumliche Ausdehnung des Magneten lässt sich auf ein zweifaches reduciren, welches über die Oberfläche desselben zu nehmen ist. Um dies zu zeigen, bringen wir das Integral auf die Form

(8''.) $$\begin{aligned} Q = \varkappa \iiint dx_1\, dy_1\, dz_1 & \left\{ \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\right)}{\partial y_1} + \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\right)}{\partial z} \right\} \\ - \varkappa \iiint \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1}{\varrho} & \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} \right\} \end{aligned}$$

und schreiben hiefür zur Abkürzung

(8'''.) $$Q = P - R.$$

Wegen der vollkommenen Symmetrie untersuchen wir von P nur das erste Glied

$$P^{(1)} = \iiint dx_1\, dy_1\, dz_1 \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1}.$$

Bezeichnen wir die Werthe der x_1-Coordinate für 2 Elemente der Oberfläche des Magneten, die demselben y_1 und z_1 angehören, die also auf derselben der x-Axe parallelen Linie liegen, mit a und b, so ist durch Ausführung der Integration nach x_1

---

*) Eine Constante ist nicht hinzugefügt, da nur die Differentialquotienten gesucht werden, nicht φ selbst.

$$P^{(1)} = \iiint dx_1\, dy_1\, dz_1 \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1} = \iint dy_1\, dz_1 \left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right]_a^b.$$

Nennen wir do das Oberflächenelement, dessen Projektion auf die yz-Ebene $dy_1\, dz_1$ ist, und bezeichnen mit (n, x) den Winkel, den die in do *nach aussen* gerichtete Normale mit der positiven x-Richtung bildet, so ist

$$P^{(1)} = \int \frac{do \cos(n, x)}{\varrho_b}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)_b + \int \frac{do \cos(n, x)}{\varrho_a}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right)_a,$$

worin die Integrale mit dem Index b über die der positiven x-Richtung zugekehrte Seite der Oberfläche des Magneten auszudehnen sind, die mit dem Index a über die nach der negativen Seite gewendete; oder es ist, wenn wir rechts die Integration über die ganze Oberfläche ausdehnen,

$$P^{(1)} = \int \frac{do \cos(n, x)}{\varrho}\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

Hierin bedeutet $\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$ den Werth von $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ an der Stelle do.

Wenden wir dasselbe Raisonnement auf die beiden andern Theile von P an, so finden wir

$$(9a.)\quad \begin{aligned} P &= \varkappa \int \frac{do}{\varrho}\left\{\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}\cos(n, x) + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\cos(n, y) + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\cos(n, z)\right\}, \text{ d. i.:} \\ P &= \varkappa \int \frac{do}{\varrho}\left\{\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}\,\overline{\frac{dx}{dn}} + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\,\overline{\frac{dy}{dn}} + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}\,\overline{\frac{dz}{dn}}\right\}, \end{aligned}$$

wenn dn das Element der Normale in do ist; also schliesslich

$$(9.)\qquad P = \varkappa \int \frac{do}{\varrho}\left(\overline{\frac{d\varphi}{dn}}\right)_i.$$

Bei diesem Resultate ist aber zu bemerken, dass der Differentialquotient $\overline{\frac{d\varphi}{dn}}$ an der inneren Seite der Oberfläche zu nehmen ist, weil die ursprüngliche Integration über den von der Oberfläche eingeschlossenen Raum auszudehnen war; dies soll durch den Index i bezeichnet sein.

Der zweite Theil R der Gleichung (8″.) ist $= 0$, wie sich aus der allgemeinen Differentialgleichung für das Potential

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi.\ \text{(Dichtigkeit)}$$

ergiebt. Es ist nämlich

$$R = \varkappa \iiint \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1}{\varrho}\left\{\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2}\right\}$$

nichts anderes als das Potential von Massen, welche den Raum des ganzen Magneten ausfüllen, und deren Dichtigkeit an der Stelle $x_1\, y_1\, z_1$

gleich $\varkappa \left\{\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2}\right\}$ ist. Demgemäss ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = -4\pi\varkappa \left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right\}.$$

Und mit Rücksicht hierauf folgt aus (8‴.):

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + 4\pi\varkappa \left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right\}.$$

Nach der Gleichung (9.) ist aber P das Potential von Massen, die sich nur auf der Oberfläche des Magneten befinden und zwar hier in der Dichtigkeit $\varkappa \frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial n}$; folglich ist für jede Stelle im Innern des Magneten

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

und daher ist

$$\text{(10.)} \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 4\pi\varkappa \left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right\}.$$

Differenziren wir aber die Gleichung (8.) zweimal partiell nach x, y und z und addiren alle drei Gleichungen, so finden wir

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0,$$

also, da V das Potential von Massen ist, die ganz ausserhalb des Magneten gedacht werden,

$$\text{(11.)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0.$$

Wenn wir die Gleichungen (10.) und (11.) combiniren, so finden wir für jeden Punkt xyz im Innern des Magneten

$$\text{(12.)} \qquad \begin{aligned} &\left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right\}(1 + 4\pi\varkappa) = 0 \\ &\left\{\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right\}(1 + 4\pi\varkappa) = 0. \end{aligned}$$

Es ist aber $\varkappa$ eine positive Grösse. Denn ein Magnet erzeugt immer gleichgerichteten Magnetismus, durch eine positive Kraft kann also nur ein positives magnetisches Moment hervorgerufen werden; und hieraus folgt, mittelst der Gleichungen (5.), *in der That, dass $\varkappa$ positiv sein muss. Es beruht dieses in letzter Instanz auf dem Grundgesetze des Magnetismus, dass gleichnamige magnetische Flüssigkeiten sich abstossen, ungleichnamige sich anziehen; anders verhält es sich beim Diamagnetismus, bei dem $\varkappa$ negativ ist.*

Somit folgt aus den Gleichungen (12.) für jeden Punkt xyz im Innern des Magneten

(12'.) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0;$$

mithin

$$R = \varkappa \iiint \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1}{\varrho} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} \right\} = 0,$$

also nach (8'''.) und (9.):

(13.) $$Q = \varkappa \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_i.$$

Es ist noch zu bemerken, dass der Ausdruck Q Gleichung (13.) nicht allein für einen Punkt xyz im Innern des Körpers, sondern auch für einen ausserhalb liegenden gilt; denn die Formel (5.) § 10, folglich auch die Gleichung (6.) § 12 gilt allgemein für beide Fälle. Dass sich dies aber auf die Formel (13.) überträgt, erkennt man leicht, wenn man die Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphen mit Bezug auf einen *äussern* Punkt xyz von Neuem wiederholt.

§ 13.

Fortsetzung.

Nach diesen Resultaten haben wir für die unbekannten Funktionen φ und Q folgende Gleichungen:

(1.) $$\varphi + V + Q = 0,$$

und

(2.) $$Q = \varkappa \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_i$$

und ferner für α, β, γ folgende Gleichungen:

(3.) $$\alpha = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \beta = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \gamma = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

Zu diesen Gleichungen, die sich auf einen innern Punkt des Magneten beziehen, kommt zur Bestimmung des Potentials des Magneten auf einen äusseren Punkt die vierte Gleichung

(4.) $$Q_a = \varkappa \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_i.$$

Die beiden Gleichungen (2.) und (4.) unterscheiden sich nur durch eine etwas geänderte Bedeutung von ϱ; denn dieses ϱ repräsentirt in (2.) die Entfernung des Elements *do* von dem innern Punkte, auf den das Potential genommen ist, hingegen in (4.) die Entfernung des Elementes *do* von dem entsprechenden äussern Punkte.

Wir werden zeigen, dass die magnetischen Momente und das Potential durch dieselben vollkommen bestimmt sind, dass sie also

nur eine Lösung für die Funktion φ zulassen. Wäre es möglich, dass zwei verschiedene Funktionen φ und $\varphi + \psi$ den Gleichungen genügten, so wäre sowohl

$$\varphi + V + \varkappa \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i = 0,$$

als auch

$$\varphi + \psi + V + \varkappa \int \frac{do}{\varrho} \left\{ \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i + \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_i \right\} = 0,$$

also durch Subtraktion

$$\psi + \varkappa \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_i = 0. \tag{5.}$$

ψ würde also das Potential einer Oberflächen-Belegung von der Dichtigkeit $-\varkappa \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_i$ sein, und müsste also (nach einer bekannten Eigenschaft der Flächenpotentiale) der Gleichung Genüge leisten:

$$\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_a - \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_i = 4\pi\varkappa \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_i, \tag{6.}$$

wo $\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_a$ den an der äusseren Seite der Oberfläche genommenen Differentialquotient nach der Normale vorstellt. Hieraus aber würde durch Multiplikation mit ψ und Integration über die ganze Oberfläche folgen:

$$\int \bar{\psi} \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_a do = (1 + 4\pi\varkappa) \int \bar{\psi} \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_i do. \tag{7.}$$

Diese Formel lässt eine einfache Umgestaltung zu. Es ergiebt sich nämlich durch partielle Integration

$$\iiint dx\,dy\,dz\,\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \iint dy\,dz \left[\psi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right] - \iiint dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2$$
$$\iiint dx\,dy\,dz\,\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \iint dx\,dz \left[\psi \frac{\partial \psi}{\partial y}\right] - \iiint dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2$$
$$\iiint dx\,dy\,dz\,\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \iint dx\,dy \left[\psi \frac{\partial \psi}{\partial z}\right] - \iiint dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2,$$

Addiren wir diese drei Gleichungen und unterwerfen wir die ersten Integrale rechter Hand denselben Umgestaltungen, die wir auf Seite 33 mit dem Integral P vornahmen, so finden wir, wenn wir die Integration über den innern von der Oberfläche begrenzten Raum ausdehnen:

$$0 = \int do\,\bar{\psi} \left(\frac{\partial \psi}{dn}\right)_i - \iiint_i dx\,dy\,dz \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \right\}, \tag{8.}$$

dagegen wenn wir die Integration über den ganzen ausserhalb der Oberfläche liegenden Raum ausdehnen:

$$(9.)\quad 0 = -\int do\, \bar{\psi} \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_a - \iiint_a dx\,dy\,dz \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right\},$$

Denn es unterliegt keinem Zweifel, dass die Funktion ψ (als Potential von Massen auf der Oberfläche) sowohl für jeden inneren als äusseren Punkt der Gleichung genügt:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0,$$

und dass ψ im Unendlichen $= 0$ wird, was eine wesentliche Voraussetzung der Gleichung (9.) ist.

Durch Einsetzen der Werthe (8.) und (9.) ergiebt sich aus (7.):

$$(10.)\qquad 0 = \iiint_a dx\,dy\,dz \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right\} +$$
$$+ (1 + 4\pi\varkappa) \iiint_i dx\,dy\,dz \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Da $\varkappa$ eine positive Grösse ist, so können diese Summen von Quadraten nur $= 0$ sein, wenn

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0;,$$

wenn also ψ constant ist. Die den Gleichungen (1.), (2.) genügenden Werthe von φ können sich also nur durch eine Constante unterscheiden, und eine solche ist ohne Einfluss auf den Werth von α, β, γ und Q. Damit ist bewiesen, dass die obigen Gleichungen nur *eine* Lösung zulassen.

§ 14.

Bestimmung der magnetischen Momente bei variabelen magnetisirenden Ursachen.

Wir werden jetzt eine Verallgemeinerung des in § 12 abgeleiteten Resultats mittheilen. Die Formeln (1.) bis (4.) im vorigen Paragraphen enthalten die Voraussetzung, dass die magnetisirenden Ursachen von der Zeit unabhängig sind; im Folgenden werden wir sie als variabel ansehen. Eine Aenderung derselben mit der Zeit kann sowohl in einer Aenderung ihrer Intensität, als auch in einer Aenderung ihrer Richtung bestehen. Dieser letztere Fall eignet sich besser für die Beobachtung und ist auch in der That schon zu diesem Zweck benutzt worden. Eine solche Aenderung der Richtung kann am Bequemsten durch Drehung des magnetisirten Körpers um seinen Mittelpunkt (bei unveränderter Lage des magnetisirenden) hervorgebracht werden.

Die Verschiedenheit der Wirkungen, welche sich zeigen zwischen der Magnetisirung durch constante und der durch variabele Kräfte, ist von der Art, dass sie nur durch die Annahme erklärt werden kann, dass der Effect einer magnetisirenden Ursache sich nicht momentan vollständig geltend macht, sondern dazu einer gewissen, wenn auch sehr kurzen Zeit bedarf.

Diese Annahme ändert nichts an der früheren Hypothese, dass in jedem Element des magnetisirten Körpers die magnetische Axe in die Richtung der in demselben Augenblicke zur Wirkung kommenden Kräfte falle, dass also die Gleichungen stattfinden:

$$(1.)\quad \frac{X}{R} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}};\quad \frac{Y}{R} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}};\quad \frac{Z}{R} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}};$$

in denen die Zeichen α, β, γ die bisherigen Bedeutungen haben, und X, Y, Z die Componenten sämmtlicher wirksamer Kräfte sind.*)

Der zweite Theil unserer Voraussetzung erleidet eine Modifikation. Statt der Gleichung (2.) § 12, in der p eine Constante war, haben wir jetzt

$$(2.)\quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = f(t)\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Hierin hat die Funktion $f(t)$ die Eigenschaft, für $t=0$ selbst $=0$ zu sein, dann allmählich zu wachsen und für merkliche Werthe von t constant zu sein. Aus diesen Gleichungen findet man

$$(3.)\quad \alpha = X\cdot f(t) \qquad \beta = Y\cdot f(t) \qquad \gamma = Z\cdot f(t).$$

Doch gelten diese Gleichungen (3.) zuvörderst nur für den Fall, dass X, Y, Z constant sind und bedürfen noch einer gewissen Abänderung, falls X, Y, Z. von der Zeit abhängen. Soll z. B. das während eines gegebenen Zeitintervalls $0 \ldots . t$ inducirte Moment α berechnet werden, so zerlege man dieses Intervall in lauter unendlich kleine Elemente:

(3'.) |—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|—|
$0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_m \quad t$

und bezeichne die Werthe der Componente $X = X(t)$ für diese aufeinanderfolgenden Zeitelemente resp. mit $X_0, X_0+dX_1, X_0+dX_1+dX_2$, etc. Diese Kräfte kann man mit Bezug auf das gegebene Intervall $0 \ldots . t$ noch ein wenig anders auffassen, nämlich zerlegen: *erstens* in eine während des *ganzen* Intervalls $0 \ldots . t$ wirkende *constante* Kraft X_0, *zweitens* in die nur während der Zeit $t_1 \ldots . t$ wirkende constante Kraft dX_1, *drittens* in die nur noch während der Zeit $t_2 \ldots . t$ wir-

*) Es sollen also hier X, Y, Z dieselben Componenten sein, welche früher (Seite 29, 30) mit $X+A$, $Y+B$, $Z+C$ bezeichnet wurden.

kende Kraft dX_2, etc. etc. Demgemäss ergiebt sich aus der ersten der Formeln (3.) für das gesuchte Moment α der Werth:

$$\alpha = X_0 f(t) + dX_1 \cdot f(t-t_1) + dX_2 f(t-t_2) \cdots + dX_m f(t-t_m) + \cdots$$

und dieser Werth kann, falls man jene unendlich kleinen Zeitelemente (3'.) sämmtlich $= dt$ setzt, auch so geschrieben werden:

$$\alpha = X_0 f(t) + dX_1 f(t-dt) + dX_2 f(t-2dt) + \cdots\cdots + dX_m f(t-mdt) + \cdots$$

Führen wir jetzt die Bezeichnung

$$mdt = \vartheta$$

ein, so ergiebt sich:

$$\alpha = X_0 f(t) + \int_0^t d\vartheta \frac{dX}{d\vartheta} f(t-\vartheta),$$

$$\text{d. i.} \quad \alpha = X_0 f(t) + \Big[X(\vartheta) \cdot f(t-\vartheta)\Big]_0^t + \int_0^t d\vartheta \cdot X(\vartheta) \cdot f'(t-\vartheta),$$

oder weil $f(0) = 0$ ist, und X_0 den Werth von $X(t)$ für $t = 0$, d. i. den Werth $X(0)$ darstellt:

$$\alpha = \int_0^t d\vartheta \cdot X f'(t-\vartheta);$$

hierin ist nach Lagrange's Bezeichnung $\frac{df(t-\vartheta)}{d(t-\vartheta)} = f'(t-\vartheta)$ gesetzt.

Auf dieselbe Weise erhalten wir β und γ; so finden wir statt der Gleichungen (3.) also folgende:

$$(4.) \quad \alpha = \int_0^t d\vartheta \cdot X \cdot f'(t-\vartheta); \quad \beta = \int_0^t d\vartheta \cdot Y \cdot f'(t-\vartheta);$$

$$\gamma = \int_0^t d\vartheta \cdot Z \cdot f'(t-\vartheta).$$

§ 15.

Anwendung auf den Magnetismus einer rotirenden Kugel.

Um eine Anschauung von der Bedeutung dieser Gleichungen zu geben, machen wir von ihnen eine Anwendung auf folgenden einfachen Fall. Eine Eisenkugel P rotirt um die Axe A unter dem Einfluss eines magnetischen Moleküls S, dessen Axe M senkrecht gegen die Verbindungslinie $AS = a$ ist. Diese beiden Linien wählen wir zu Coordinatenaxen und rechnen den Drehungswinkel $\varphi = (SAP)$ von AS aus. Dann sind die Coordinaten des Mittelpunktes von P

$$x = b \sin \varphi \qquad y = a - b \cos \varphi$$

ferner die von S auf die Kugel ausgeübten Componenten [vrgl. (3.) § 5]:

$$X = -\alpha_1 \left\{ \frac{1}{\varrho^3} - 3\frac{x^2}{\varrho^5} \right\} \qquad Y = \alpha_1 \frac{3\,xy}{\varrho^5} \qquad Z = 0$$

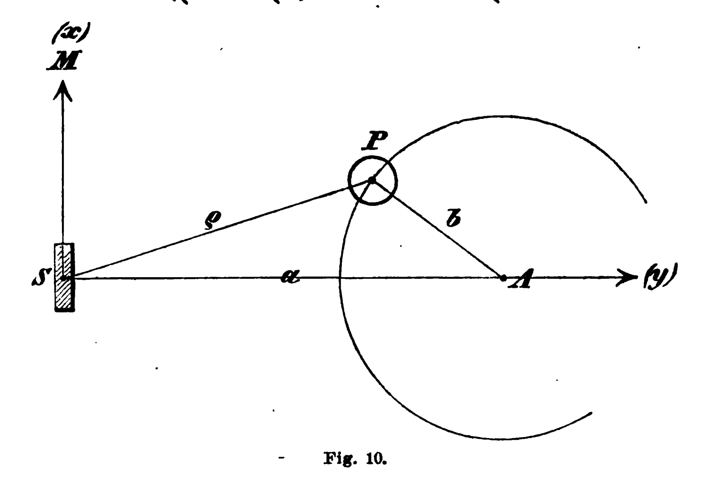


Fig. 10.

wo α_1 das magnetische Hauptmoment des Moleküls S vorstellt. Hierin ist

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$$

und wenn wir der Kugel eine constante Rotationsgeschwindigkeit n zuertheilen:

$$\varphi = n\vartheta.$$

Somit werden nach den Formeln (4.) § 14 die magnetischen Momente der rotirenden Kugel die Werthe haben:

$$\alpha = -\alpha_1 \int_0^t d\vartheta \cdot f'(t-\vartheta) \left\{ \frac{1}{\varrho^3} - \frac{3b^2 \sin^2 n\vartheta}{\varrho^5} \right\}$$

$$\beta = \alpha_1 \int_0^t d\vartheta \cdot f'(t-\vartheta) \frac{(a - b\cos n\vartheta)\,3b \sin n\vartheta}{\varrho^5}.$$

Da $f'(t)$ für endliche Werthe von t verschwindet, so können wir diese Ausdrücke durch Entwickelung nach Potenzen von $t - \vartheta$ in sehr stark convergirende Reihen verwandeln; bezeichnen wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{\varrho^3} - \frac{3b^2 \sin^2 n\vartheta}{\varrho^5} = \psi(\vartheta) \qquad \frac{(a - b\cos n\vartheta)\,3b \sin n\vartheta}{\varrho^5} = \chi(\vartheta),$$

so ist

$$\psi(\vartheta) = \psi\big(t - (t-\vartheta)\big) = \psi(t) - (t-\vartheta)\frac{d\psi(t)}{dt} + \cdots$$

$$\chi(\vartheta) = \chi\Big(t - (t - \vartheta)\Big) = \chi(t) - (t - \vartheta)\frac{d\chi(t)}{dt} + \cdots.$$

Da wir das Quadrat der unendlich kleinen Grösse $t - \vartheta$ gegen diese selbst vernachlässigen dürfen, so erhalten wir also

$$\alpha = -\alpha_1\int_0^t d\vartheta \cdot f'(t-\vartheta)\,\psi(t) + \alpha_1\int_0^t d\vartheta\,(t-\vartheta)\,f'(t-\vartheta)\frac{d\psi(t)}{dt}$$

$$\beta = \alpha_1\int_0^t d\vartheta \cdot f'(t-\vartheta)\,\chi(t) - \alpha_1\int_0^t d\vartheta\,(t-\vartheta)\,f'(t-\vartheta)\frac{d\chi(t)}{dt}$$

oder, falls wir die Integrale linker Hand wirklich ausfüllen:

$$\alpha = -\alpha_1\left\{\psi(t)\Big(f(t) - f(0)\Big) - \frac{d\psi(t)}{dt}\int d\vartheta\,(t-\vartheta)\,f'(t-\vartheta)\right\}$$

$$\beta = \alpha_1\left\{\chi(t)\Big(f(t) - f(0)\Big) - \frac{d\chi(t)}{dt}\int d\vartheta\,(t-\vartheta)\,f'(t-\vartheta)\right\}.$$

Geben wir endlich diesen Formeln die Gestalt:

$$\alpha = -\alpha_1\left\{p\psi(t) - q\frac{d\psi(t)}{dt}\right\}$$

$$\beta = +\alpha_1\left\{p\chi(t) - q\frac{d\chi(t)}{dt}\right\},$$

so sind p und q nothwendiger Weise vom Werthe von t als unabhängig anzusehen, da $f(t)$ für alle endlichen Werthe von t dieselbe Grösse hat, und für $t = 0$ selbst $= 0$ wird. Uebrigens können wir die obigen Ausdrücke als die ersten Glieder der Reihenentwickelung von

$$\alpha = -\alpha_1 p\,\psi\left(t - \frac{q}{p}\right) \qquad \beta = \alpha_1 p\,\chi\left(t - \frac{q}{p}\right)$$

ansehen. Setzen wir die Bedeutung von ψ und χ wieder ein, so erhalten wir

$$\alpha = -\alpha_1 p\left\{\frac{1}{\eta^3} - \frac{3b^2\sin^2 n\left(t - \frac{q}{p}\right)}{\eta^5}\right\}$$

$$\beta = +\alpha_1 p\left\{\frac{\left(a - b\cos n\left(t - \frac{q}{p}\right)\right)3b\sin n\left(t - \frac{q}{p}\right)}{\eta^5}\right\},$$

wo η den Werth von ϱ zur Zeit $\left(t - \frac{q}{p}\right)$ vorstellt. Der magnetische Zustand der rotirenden Kugel zur Zeit t ist also derjenige, welcher einem früheren Zeitmomente, also einer früheren Lage der Kugel zukommen würde, wenn die Wirkung momentan geschähe. Die Kugel trägt in die neue Lage den früheren Zustand hinüber.

Die Vernachlässigung von $(t - \vartheta)^2$ gegen $t - \vartheta$, die wir gemacht haben, setzt voraus, dass $f(t - \vartheta)$ so rasch, d. h. für so kleine Werthe

von $t - \vartheta$ seinen constanten Werth erreicht, dass dieselben in der That als unendlich klein anzusehen sind. Dies ist nicht bewiesen; aber nach Allem, was wir über derartige Wirkungen wissen, hat diese Annahme sehr grosse Wahrscheinlichkeit.

§ 16.

Fortsetzung zu § 14.

Kehren wir zum allgemeinen Problem zurück, so erhalten wir aus den Formeln (4.) § 14 durch Einführung der Werthe für die Componenten (vrgl. (3.) und (3'.) § 12)

$$(1.)\quad \begin{aligned} \alpha &= -\int_0^t d\vartheta\, f'(t-\vartheta)\left\{\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{4}{3}\pi\alpha\right\}; \\ \beta &= -\int_0^t d\vartheta\, f'(t-\vartheta)\left\{\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{4}{3}\pi\beta\right\}; \\ \gamma &= -\int_0^t d\vartheta\, f'(t-\vartheta)\left\{\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{4}{3}\pi\gamma\right\}. \end{aligned}$$

Hierin hat V seine in § 12 u. s. w. gebrauchte Bedeutung, und es ist ebenso wie früher

$$(2.)\quad Q = \iiint dx_1\, dy_1\, dz_1 \left\{\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial z_1}\right\}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich ferner ebenso wie früher trotz der complicirteren Form von α, β, γ auf dieselbe Weise vereinfachen. Wir geben ihm zunächst die Gestalt:

$$(3.)\quad \begin{aligned} Q = &\int \frac{do}{\varrho}\left\{\bar{\alpha}_1 \cos(n,x) + \bar{\beta}_1 \cos(n,y) + \bar{\gamma}_1 \cos(n,z)\right\} \\ &- \iiint \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1}{\varrho}\left\{\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial z_1}\right\}, \end{aligned}$$

die sich ganz analog aus der Gleichung (2.) entwickelt wie die Gleichungen (8''.) und (9a.) § 12 aus Gleichung (8'.). Die Bedeutung der Zeichen ist dieselbe wie dort, das erste Integral, das wir zur Abkürzung wieder mit P bezeichnen, ist über die ganze Oberfläche auszudehnen, das zweite, das R heissen soll, über das ganze Volum des magnetisirten Körpers. Demnach ist

$$(3'.)\quad Q = P - R.$$

Die Funktion R, als Potential von Massen von der Dichtigkeit $\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial z_1}$, genügt der Differentialgleichung

$$(4.)\qquad \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = -4\pi\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right\},$$

die für jeden Punkt im Innern gilt. Es ist aber für P (als Potential von Massen auf der Oberfläche) in jedem Punkte im Innern

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0.$$

Folglich ist

$$(4'.)\qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 4\pi\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right\}$$

für jeden innern Punkt xyz. Endlich ist für jeden innern Punkt, da V das Potential von äussern Massen repräsentirt:

$$(4''.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (4'.) und (4''.) erhalten wir aus den Gleichungen (1.) durch Differentiation und Addition

$$(5.)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = -\tfrac{8}{3}\pi\int_0^t d\vartheta \cdot f'(t-\vartheta)\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right\}.$$

Wir werden zeigen, dass diese Gleichung nur bestehen kann, wenn

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0$$

ist, d. h. wenn sie identisch $0 = 0$ giebt. Zu diesem Zweck geben wir derselben die abgekürzte Form:

$$(6.)\qquad \Omega(t) = -\tfrac{8}{3}\pi\int_0^t d\vartheta \cdot f'(t-\vartheta)\,\Omega(\vartheta)$$

Hieraus folgt sofort, dass

$$\Omega(0) = 0$$

sein muss. Differenzirt man ferner die Gleichung (6.) nach t, so findet man zunächst

$$(6'.)\qquad \frac{d\Omega(t)}{dt} = -\tfrac{8}{3}\pi\left\{f'(0)\cdot\Omega(t) + \int_0^t d\vartheta\,\frac{\partial^2 f(t-\vartheta)}{\partial t\cdot\partial t}\,\Omega(\vartheta)\right\}$$

also für $t = 0$

$$\left(\frac{d\Omega(t)}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

Daraus ergiebt sich, dass auch $\Omega(t) = 0$ für $t = \tau$ ist, falls nur τ unendlich klein. Setzt man also in Gleichung (6'.) $t = \tau$, so verschwindet die rechte Seite, weil $\Omega(t) = 0$ von $t = 0$ bis $t = \tau$. Es wird daher der Differentialquotient auch für das nächste Zeittheilchen verschwinden. Indem man in dieser Weise fortfährt, sieht man ein,

dass sowohl $\Omega(t)$ als $\frac{d\Omega(t)}{dt}$ für jeden Werth von t verschwinden müssen. Eine Funktion, welche der Gleichung (6.) genügen soll, muss also für jeden Werth des Arguments $= 0$ werden. Oder mit andern Worten: Zum Bestehen der Gleichung (5.) ist erforderlich, dass

$$(7.)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0$$

sei. Hieraus folgt sofort:

$$(8.)\qquad R = 0,\ \text{und}\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0,\ \text{und ferner:}$$

$$(8'.)\qquad Q = \int \frac{do}{\varrho}\left\{\bar{\alpha}\cos(n,x) + \bar{\beta}\cos(n,y) + \bar{\gamma}\cos(n,z)\right\}.$$

Wir sind ferner berechtigt, wie in § 12, anzunehmen, dass α, β und γ die partiellen Differentialquotienten derselben Funktion φ sind,

$$(9.)\qquad \alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad \beta = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad \gamma = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

wenn bewiesen ist, dass

$$(9'.)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial x};\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial z} = \frac{\partial\gamma}{\partial x};\qquad \frac{\partial\beta}{\partial z} = \frac{\partial\gamma}{\partial y}.$$

Es ist aber nach den Werthen von α, β, γ aus den Gleichungen (1.) mit Berücksichtigung der Gleichungen (8.) und (4″.)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} = \tfrac{4}{3}\pi\int_0^t d\vartheta f'(t-\vartheta)\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} = \tfrac{4}{3}\pi\int_0^t d\vartheta f'(t-\vartheta)\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y} = \tfrac{4}{3}\pi\int_0^t d\vartheta f'(t-\vartheta)\left\{\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right\};$$

und nach dem oben bewiesenen Theorem der Funktion Ω (6.) ist zum Bestehen dieser Gleichungen erforderlich, dass die Gleichungen (9′.) erfüllt werden. Somit sind die Gleichungen (9.) gerechtfertigt.

§ 17.

Fortsetzung.

Durch Einführung dieser Werthe (9.) von α, β, γ kommt die Lösung unseres Problems auf die Auflösung folgende Gleichungen hinaus:

$$(1.\qquad \varphi + \int_0^t d\vartheta f'(t-\vartheta)\left\{V + Q - \tfrac{4}{3}\pi\varphi\right\} = 0\ \text{nach Seite 42 (1.),}$$

(2.) $$Q = \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i$$ nach Gleichung (8'.),

(3.) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$ nach Gleichung (7.),

aus denen die gesuchten Grössen

(4.) $$\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und das Potential des Magneten auf einen äussern Punkt

(5.) $$Q_a = \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i$$

abzuleiten sind.

Wir haben zur ersten Gleichung keine Integrationsconstante hinzugefügt, weil es nur auf die Differentialquotienten von φ ankommt, dieselbe also keinerlei Einfluss auf die Rechnung ausüben könnte.

Wir werden noch zeigen, dass die gesuchten Grössen in der That vollständig durch die obigen Gleichungen bestimmt sind, indem wir nachweisen, dass denselben nur *eine* Funktion φ genügen kann. Gäbe es zwei solcher Funktionen φ und $\varphi + \psi$, so wäre

$$\varphi + \int_0^t d\vartheta \cdot f'(t-\vartheta) \left\{ V + \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i - \tfrac{4}{3}\pi\varphi \right\} = 0, \text{ und auch}$$

$$\varphi + \psi + \int_0^t d\vartheta \cdot f'(t-\vartheta) \left\{ V + \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\varphi}{dn} + \frac{d\psi}{dn}\right)_i - \tfrac{4}{3}\pi(\varphi + \psi) \right\} = 0.$$

Also müsste sein

(6.) $$\psi + \int_0^t d\vartheta \cdot f'(t-\vartheta) \left\{ \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_i - \tfrac{4}{3}\pi\psi \right\} = 0.$$

Wie aus dieser Gleichung hervorgeht, muss die Funktion ψ für $t = 0$ verschwinden. Dass sie auch für jeden andern Werth von t verschwinden muss, lässt sich durch das Theorem der Funktion Ω (6.) § 16 beweisen.

In der That folgt aus (6.) durch Differentiation

(7.) $$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -f'(0) \left\{ \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)_i - \tfrac{4}{3}\pi\psi \right\} - \int_0^t d\vartheta \frac{\partial^2 f(t-\vartheta)}{\partial t \cdot \partial t} \left\{ \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)_i - \tfrac{4}{3}\pi\psi \right\}.$$

Es ist nämlich zu beachten, dass die Funktionen von φ, ψ, V, α, β, γ, Q u. s. w., welche in den Integralen nach ϑ von 0 bis t enthalten sind, Funktionen von ϑ und nicht von t sind, weil die in § 14 eingeführten Componenten X, Y, Z von ϑ abhingen, nicht aber von t.

Setzt man in Gleichung (7.) $t = 0$, so ergiebt sich, da für $t = 0$ auch $\psi = 0$ und folglich auch $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ werden, dass

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0,$$

ist. Und hieraus folgt weiter, dass die Gleichung $\psi = 0$ auch noch stattfindet für $t = \tau$, falls nur τ unendlich klein ist. Setzt man jetzt in Gleichung (7.) $t = \tau$, so ergiebt sich $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ für $t = \tau$, mithin $\psi = 0$ für $t = 2\tau$; und indem man in dieser Weise fortfährt, überzeugt man sich, dass ψ für jeden Werth von t verschwinden muss. Es giebt also keine Funktion ψ von t, welche den geforderten Bedingungen genügte.

Ebenso wenig kann eine von t unabhängige Funktion ψ der Gleichung (6.) genügen. In diesem Falle giebt die Gleichung durch Ausführung der angedeuteten Integration

$$\psi = +\left\{\int \frac{do}{\varrho}\left(\frac{\overline{d\psi}}{dn}\right)_i - \tfrac{4}{3}\pi\psi\right\}\Big[f(t-\vartheta)\Big]_0^t$$

und da $f(0) = 0$ ist:

$$(8.)\quad \begin{aligned} \psi &= -\left\{\int \frac{do}{\varrho}\left(\frac{\overline{d\psi}}{dn}\right)_i - \tfrac{4}{3}\pi\psi\right\} f(t) \\ \text{d. i.: } \left(1 - \tfrac{4}{3}\pi f(t)\right)\psi &= -f(t)\int \frac{do}{\varrho}\left(\frac{\overline{d\psi}}{dn}\right)_i \end{aligned}$$

und für grosse t

$$(8'.)\quad (1 - \tfrac{4}{3}\pi p)\,\psi = -p\int \frac{do}{\varrho}\left(\frac{\overline{d\psi}}{dn}\right)_i, \text{ d. i. } \psi = -\varkappa\int \frac{do}{\varrho}\left(\frac{\overline{d\psi}}{dn}\right)_i,$$

wo p den constanten Werth der Funktion $f(t)$ für grosse t, und $\varkappa$ die in (4.) § 12 definirte Constante vorstellt. Aus dieser letzten Gleichung (8'.) folgt aber sofort [vrgl. (5.) § 13]: $\psi = \text{Const.}$ Eine Constante kann aber keinen Einfluss auf die Werthe von α, β, γ und Q ausüben; folglich ist bewiesen, dass die Gleichungen (1.) bis (5.) nur eine Lösung zulassen.

§ 18.

Magnetismus einer ruhenden Eisenkugel unter dem Einflusse constanter Kräfte.

Wir gehen jetzt über zu speziellen Anwendungen der in den §§ 12 bis 17 enthaltenen allgemeinen Grundformeln und behandeln von diesen zunächst folgenden einfachen Fall.

Es ist eine homogene magnetisirbare Kugel gegeben, welche sich in Ruhe und unter dem Einflusse von magnetischen Kräften befindet, die

ihrer Richtung und Grösse nach constant sind. Solche constante Kräfte können wir uns durch den Erdmagnetismus oder auch durch die von *Neumann* angegebene Anordnung elektrischer Ströme verschaffen.

Wir führen ein doppeltes Coordinatensystem ein, polare und rechtwinklige Coordinaten. Der Anfang beider liege im Mittelpunkte der Kugel; die Coordinaten eines Elementes der Oberfläche seien R, ϑ_1, ω_1 und x_1, y_1, z_1, während die einer beliebigen andern Stelle r, ϑ, ω und x, y, z sein mögen.

Für diesen Fall ergiebt sich aus den Formeln (1.) bis (3.) § 13

$$(1.) \qquad \varphi + V + Q = 0$$

$$(2.) \qquad Q = \varkappa R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\omega_1}{\varrho} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=R}$$

$$(3.) \qquad \alpha = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \qquad \beta = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \qquad \gamma = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Bezeichnen wir die Componenten der magnetisirenden Kraft mit A, B, C, so ergiebt sich unmittelbar

$$(4.) \qquad V = -\{Ax + By + Cz\}$$

oder

$$(4'.) \qquad V = -r\{A \cos \vartheta + B \sin \vartheta \cos \omega + C \sin \vartheta \sin \omega\},$$

wenn wir den Winkel ϑ von der x-Axe und ω von der xy-Ebene aus rechnen.

Wie wir zeigen werden, genügen wir diesen Gleichungen durch die Annahme, dass

$$(5.) \qquad \varphi = Mx + Ny + Pz$$

$$(5'.) \qquad \varphi = r\{M \cos \vartheta + N \sin \vartheta \cos \omega + P \sin \vartheta \sin \omega\}$$

ist, wo M, N, P constante Grössen bezeichnen, die noch näher zu bestimmen sind. Da es, wie bewiesen, nur eine Lösung der Gleichungen giebt, so wird der Ausdruck (5.), wenn er ihnen genügt, die allgemeine Lösung derselben vorstellen.

Durch Einsetzen des Werthes (5'.) in die Gleichung (2.) erhalten wir, wenn wir zugleich für ϱ seinen Werth aus der Gleichung

$$(6.) \quad \varrho^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos(r,R) = R^2 + r^2 - 2rR\{\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\omega - \omega_1)\}$$
$$\varrho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

einführen,

$$(7.) \quad Q = \varkappa R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\omega_1 \, d\vartheta_1 \sin \vartheta_1 \{M \cos \vartheta_1 + N \sin \vartheta_1 \cos \omega_1 + P \sin \vartheta_1 \sin \omega_1\}}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\{\cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos(\omega - \omega_1)\}}}.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (1.), so wird

$$r\{(M-A)\cos\vartheta+(N-B)\sin\vartheta\cos\omega+(P-C)\sin\vartheta\sin\omega\}$$

$$(8.)\quad +\varkappa R^2\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\frac{d\omega_1\,d\vartheta_1\sin\vartheta_1\{M\cos\vartheta_1+N\sin\vartheta_1\cos\omega+P\sin\vartheta_1\sin\omega_1\}}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\{\cos\vartheta\cos\vartheta_1+\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\omega-\omega_1)\}}}=0\,.$$

Da die Gleichung in Bezug auf M, N, P lineär ist, so wird sie genügen, diese drei Constanten zu bestimmen.

Um das Integral Q auf eine einfachere Form zu bringen, führen wir die Grösse

$$(9.)\qquad S^2=M^2+N^2+P^2$$

ein. Die Linie S bildet mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus

$$\frac{M}{S},\quad \frac{N}{S},\quad \frac{P}{S}$$

sind. Dadurch wird

$$(10.)\qquad Q=\varkappa R^2 S\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\frac{d\omega_1\,d\vartheta_1\,\sin\vartheta_1\,\cos(R,S)}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos(r,R)}}\,.$$

Bezeichnen wir nun

$$\cos(r,R)=u\qquad \cos(r,S)=v$$

und nennen den Winkel, den eine durch r und R gelegte Ebene mit einer anderen durch r und S gelegten bildet, p, so wird durch Einführung dieses neuen Polarcoordinatensystems, dessen Axe r ist,

$$(10'.)\qquad Q=\varkappa R^2 S\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\frac{dp\;du\,\sin u\{\cos u\cos v+\sin u\sin v\cos p\}}{\sqrt{R^2+r^2-2\,r\,R\cos u}}\,,\ \text{d. i.}$$

$$(10''.)\qquad =2\,\pi\varkappa\,R^2 S\int_0^{\pi}\frac{du\,\sin u\cos u}{\sqrt{R^2+r^2-2rR\cos u}}\cdot\cos v$$

$$=2\,\pi\varkappa S R^2\cos v\int_0^{\pi}\frac{\sin u\cos u\,du}{\sqrt{R^2+r^2-2\,rR\cos u}}$$

$$=2\,\pi\varkappa S R^2\cos v\int_{-1}^{+1}\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2+r^2-2\,rR\,x}}$$

$$=-\left[\frac{\sqrt{R^2+r^2-2\,rRx}}{3\,rR}\left(x+\frac{R^2+r^2}{rR}\right)\right]_{-1}^{+1}\cdot 2\,\pi\,\varkappa\,S\,R^2\cos v\,.$$

Da die Wurzel immer positiv genommen werden muss, und $r<R$ ist, giebt dies

$$Q = -\left\{\frac{R-r}{3rR}\left(1+\frac{R^2+r^2}{rR}\right) - \frac{R+r}{3rR}\left(\frac{R^2+r^2}{rR}-1\right)\right\} 2\pi\varkappa S R^2 \cos v$$

(11.) d. i.: $$Q = \tfrac{4}{3}\pi\varkappa S r \cdot \cos v.$$

Diese Formel aber kann, weil

$$\cos v = \cos(r, S) = \frac{M}{S}\cos\vartheta + \frac{N}{S}\sin\vartheta\cos\omega + \frac{P}{S}\sin\vartheta\sin\omega,$$

ist, auch so geschrieben werden:

(11′.) $$Q = \tfrac{4}{3}\pi\varkappa r\{M\cos\vartheta + N\sin\vartheta\cos\omega + P\sin\vartheta\sin\omega\}.$$

Setzt man die so erhaltenen Werthe von V, Q und φ in die Gleichung (1.), so erhält man

$$\begin{aligned}&\tfrac{4}{3}\pi\varkappa r\{M\cos\vartheta + N\sin\vartheta\cos\omega + P\sin\vartheta\sin\omega\}\\ &\quad - r\{A\cos\vartheta + B\sin\vartheta\cos\omega + C\sin\vartheta\sin\omega\}\\ &\quad + r\{M\cos\vartheta + N\sin\vartheta\cos\omega + P\sin\vartheta\sin\omega\} = 0\end{aligned}$$

und zum Bestehen dieser Gleichung ist erforderlich, dass

(12.) $$M(1+\tfrac{4}{3}\pi\varkappa) = A; \quad N(1+\tfrac{4}{3}\pi\varkappa) = B; \quad P(1+\tfrac{4}{3}\pi\varkappa) = C.$$

Dadurch sind M, N, P bestimmt. Man erhält also:

$$\varphi = \frac{r}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}\left\{A\cos\vartheta + B\sin\vartheta\cos\omega + C\sin\vartheta\sin\omega\right\}$$

oder

(13.) $$\varphi = \frac{1}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}\left\{Ax + By + Cz\right\},$$

woraus unmittelbar die gesuchten *magnetischen Momente* sich ergeben

(14.) $$\alpha = \frac{\varkappa}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}A; \quad \beta = \frac{\varkappa}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}B; \quad \gamma = \frac{\varkappa}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}C.$$

Dieselben sind offenbar constant, nämlich unabhängig von den Coordinaten des Punktes xyz; *die Kugel ist demnach gleichmässig magnetisirt* und befindet sich in einem Zustande, den wir bereits in § 11 behandelt haben. Sie wirkt also auf einen äussern Punkt wie ein in ihrem Mittelpunkte befindliches magnetisches Molekül, dessen Hauptmoment $\frac{4}{3}\pi R^3\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ ist; *ihr Potential auf einen äussern Punkt* ist nach Gleichung (6′.) § 11

(15.) $$Q_a = \frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa R^3}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}\cdot\frac{aA+bB+cC}{r^3},$$

worin jetzt r die Entfernung des Punktes abc ausserhalb der Kugel vom Mittelpunkte derselben bezeichnet. Schreiben wir zur Abkürzung

(16.) $$\frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa} = k,$$

so wird

(15′.) $$Q_a = kR^3\frac{aA+bB+cC}{r^3}, \quad \text{wo: } r^2 = a^2+b^2+c^2.$$

§ 19.
Bestimmung der Constante $\varkappa$ aus der Ablenkung einer Nadel durch die magnetisirte Kugel.

Von diesem allgemeinen Ausdrucke für das Potential der durch constante Kräfte magnetisirten Eisenkugel auf einen äussern Punkt machen wir Gebrauch, um die Ablenkung zu bestimmen, die eine in der Nähe derselben aufgestellte Magnetnadel erfährt. Zu dem Ende führen wir ein bestimmtes Coordinatensystem ein, die z-Axe vertikal, x horizontal in der Ebene des Meridians, y senkrecht dagegen. Die magnetischen Kräfte A, B, C sollen vom Erdmagnetismus ausgehen; dann ist bei der angenommenen Lage des Coordinatensystems $B = 0$, A die horizontale Componente des Erdmagnetismus und C die vertikale. Das Potential wird also

$$(1.)\qquad Q_a = kR^3 \frac{aA + cC}{r^3}, \quad \text{wo: } r^2 = a^2 + c^2$$

und man erhält durch Differentiation nach a, b, c die drei Componenten

$$(2.)\qquad \begin{aligned} X &= kR^3 \left\{ 3 \frac{aA + cC}{r^5} a - \frac{A}{r^3} \right\} \\ Y &= kR^3 \left\{ 3 \frac{aA + cC}{r^5} b \right\} \\ Z &= kR^3 \left\{ 3 \frac{aA + cC}{r^5} c - \frac{C}{r^3} \right\}. \end{aligned}$$

Ist die Nadel hinlänglich weit von der Kugel entfernt, so muss die Richtung der Nadel zusammenfallen mit der Richtung der Resultante sämmtlicher auf sie wirkender Kräfte; erlaubt ihre Aufhängung nur eine Drehung um eine vertikale Axe, so wird die Tangente ihrer Ablenkung aus dem Meridian den Werth haben:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} v &= \frac{Y}{A + X} = \frac{kR^3\, 3 \frac{aA + cC}{r^5}\, b}{A\left\{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\} + 3\, kR^3 \frac{aA + cC}{r^5}\, a} \\ \text{d. i.: } \operatorname{tg} v &= \frac{k\left(\frac{R}{r}\right)^3 3 \frac{aA + cC}{r^2}\, b}{A\left\{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\} + 3\, k\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{aA + cC}{r^2}\, a}. \end{aligned}$$

Die Beobachtung dieser Ablenkung kann benutzt werden, die Constante k zu bestimmen. Befinden sich die Nadel und der Mittelpunkt der Kugel in einer Horizontalebene, d. h. ist $c = 0$, so wird Gleichung (3.)

$$\operatorname{tg} v = \frac{k\left(\frac{R}{r}\right)^3 3\,A\,\frac{ab}{r^2}}{A\left\{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3\right\} + 3\,k\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{a^2}{r^2} A}$$

(4.) d. h.: $$\operatorname{tg} v = \frac{k\left(\frac{R}{r}\right)^3 3 \cos\varphi \sin\varphi}{\left[1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\left[1 + \frac{3\,k\left(\frac{R}{r}\right)^3}{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3}\cos^2\varphi\right]}.$$

Die Ablenkung v ist also $= 0$, wenn der Mittelpunkt der Kugel im Meridian der Nadel liegt oder die Verbindungslinie beider Mittelpunkte gegen den Meridian senkrecht steht. Dazwischen erreicht v ein Maximum, für welches der zugehörige Werth von φ aus der Gleichung sich ergiebt:

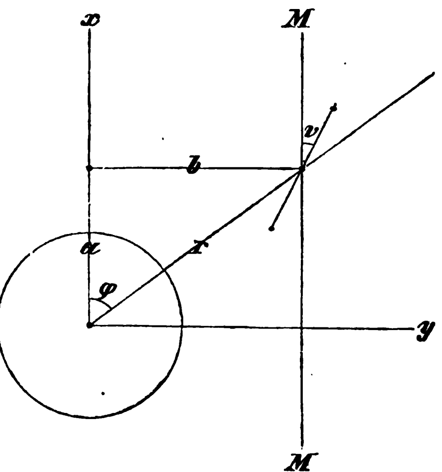


Fig. 11.

(5.) $$\operatorname{ctg}^2 \varphi = \frac{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3}{1 + 2\,k\left(\frac{R}{r}\right)^3}.$$

Und zwar erhält man diese Gleichung aus (4.) durch Differentiation nach φ.

Da r sehr gross gegen den Halbmesser R der Kugel ist und auch, wie sich ergeben wird, $k < 1$ ist*), so folgt aus (5.) angenähert

(5′.) $$\operatorname{ctg}^2 \varphi = 1\,, \quad \text{d. i.:} \quad \varphi = 45^0.$$

Der grösste Ausschlag der Nadel wird also erfolgen, wenn die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Kugel und der Nadel den Meridian unter etwa 45^0 trifft; diese Annäherung ist um so stärker, je grösser die Entfernung der Kugel von der Nadel ist.

Um k zu bestimmen, genügt eine Beobachtung von v bei einem Werthe von $\varphi = 45^0$. In diesem Falle wird aus der Gleichung (4.)

(6.) $$\operatorname{tg} v = \frac{\frac{3}{2}\,k\left(\frac{R}{r}\right)^3}{\left[1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\left[1 + \frac{3}{2}\,\frac{k\left(\frac{R}{r}\right)^3}{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3}\right]}$$

und mit Vernachlässigung der sechsten Potenz von $\frac{R}{r}$

*) Vergl. Seite 52, und namentlich Seite 60.

$$\operatorname{tg} v = \frac{\frac{3}{2} k \left(\frac{R}{r}\right)^3}{1 + \frac{1}{2} k \left(\frac{R}{r}\right)^3}$$

und daraus mit derselben Annäherung

(6'.) $$\operatorname{tg} v = \tfrac{3}{2} k \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Mit Hülfe dieser Formel hat Neumann aus dem beobachteten Werthe von v das k berechnet; er fand etwa

(7.) $$k = 0{,}9.$$

Dieser Werth hat aber nur Bedeutung für die individuelle Eisenmasse, mit der die Beobachtung angestellt wurde. — Hat man k gefunden, so ergiebt sich alsdann das $\varkappa$ mittelst der Relation (16.) Seite 49.

§ 20.

Messung der Inclination durch Beobachtung horizontaler Ablenkungen.

Die Formel (3.) § 19 liefert ferner eine Methode, die magnetische Inclination zu bestimmen und zwar lediglich aus der horizontalen Ablenkung einer Nadel aus dem Meridian durch die Einwirkung der gleichförmig magnetisirten Kugel.

Man hat durch eine geringe Umgestaltung

(1.) $$\operatorname{tg} v = \frac{\left[\dfrac{3k\left(\frac{R}{r}\right)^3}{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3}\right] \cdot \dfrac{(aA + cC)\, b}{A r^2}}{1 + \left[\dfrac{3k\left(\frac{R}{r}\right)^3}{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3}\right] \cdot \dfrac{(aA + cC)\, a}{A r^2}}.$$

Diese Formel aber kann, falls man den auf der rechten Seite vorhandenen Nenner durch Multiplication fortschafft, auch so geschrieben werden:

(2.) $$\frac{\operatorname{tg} v}{b - a \operatorname{tg} v} = \left[\frac{3k\left(\frac{R}{r}\right)^3}{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3}\right] \frac{aA + cC}{A r^2}.$$

Beobachtet man ausser dieser Ablenkung v der Nadel in der Stellung abc noch die Ablenkung w, die sie erfährt, wenn sie sich an der Stelle $a, b, -c$ befindet und übrigens alle Verhältnisse gleich geblieben sind, so erhält man zu der Gleichung (2.) noch folgende:

$$(3.)\qquad \frac{\operatorname{tg} w}{b - a \operatorname{tg} w} = \left[\frac{3\,k\left(\frac{R}{r}\right)^3}{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3}\right] \cdot \frac{aA - cC}{Ar^2}.$$

Diese beiden Gleichungen genügen, das Verhältniss von C zu A oder die Inclination zu berechnen. Man findet aus (2.) und (3.) durch Addition und Subtraction:

$$(4.)\qquad \begin{cases} 2\left[\frac{3\,k\left(\frac{R}{r}\right)^3}{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3}\right]\frac{a}{r^3} = \frac{\operatorname{tg} v}{b - a \operatorname{tg} v} + \frac{\operatorname{tg} w}{b - a \operatorname{tg} w} \\ 2\left[\frac{3\,k\left(\frac{R}{r}\right)^3}{1 - k\left(\frac{R}{r}\right)^3}\right]\frac{c}{r^2}\frac{C}{A} = \frac{\operatorname{tg} v}{b - a \operatorname{tg} v} - \frac{\operatorname{tg} w}{b - a \operatorname{tg} w} \end{cases}$$

und daraus ergiebt sich

$$(5.)\qquad \frac{C}{A} = \left[\frac{\frac{\operatorname{tg} v}{b - a \operatorname{tg} v} - \frac{\operatorname{tg} w}{b - a \operatorname{tg} w}}{\frac{\operatorname{tg} v}{b - a \operatorname{tg} v} + \frac{\operatorname{tg} w}{b - a \operatorname{tg} w}}\right] \cdot \frac{a}{c}.$$

Damit ist die Inclination durch beobachtete Grössen vollständig ausgedrückt und kann bei wirklichen Beobachtungen aus den gemessenen Grössen a, b, c, v, w berechnet werden. Für Königsberg würde sich, beispielsweise, 69^0 und einige Minuten ergeben.

Der Vortheil dieser Methode vor der direkten Messung (die von sehr geringer Schärfe sein würde) besteht in der Möglichkeit einer weit genaueren Messung eines horizontalen Winkels, als der eines vertikalen. Durch Anwendung von Spiegelapparat u. s. w. kann man bei einem horizontalen Winkel die Genauigkeit einer astronomischen Beobachtung erreichen. Bei der Beobachtung der Inclinationsnadel sind dagegen die Aufhängung mittelst einer stählernen Axe und der Einfluss der Lage des Schwerpunktes der Nadel nicht zu vermeidende Uebelstände. Die soeben angegebene Methode hat dagegen den Nachtheil, dass nach Gleichung (5.) die gesuchte Grösse von der Differenz zweier beobachteter Grössen abhängt, so dass ihr möglicher Fehler doppelt so gross ist als der Fehler einer Beobachtung. Ausserdem ist in der ganzen Betrachtung der wesentliche Punkt ausser Acht gelassen, dass die Compassnadel inducirend auf die Kugel wirkt und der durch sie inducirte Magnetismus eine Aenderung der Ablenkung verursacht. Dieser Umstand kann indess ohne grosse Schwierigkeit in Rechnung gebracht werden.

§ 21.

Magnetischer Zustand einer hohlen Kugel unter dem Einflusse constanter magnetisirender Kräfte.

Die Formeln des § 18 sind leicht auszudehnen auf den allgemeinen Fall, dass eine hohle Kugel, d. i. eine Kugelschale, durch den Erdmagnetismus magnetisirt wird. Der äussere Halbmesser derselben sei R_1, der innere R_2.

Mit derselben Bezeichnung wie bisher, erhalten wir ebenso wie in § 15

$$(1.)\qquad \varphi + V + Q = 0$$

$$(2.)\qquad V = -\{Ax + By + Cz\}$$

oder

$$(2'.)\qquad V = -r\{A\cos\vartheta + B\sin\vartheta\cos\omega + C\sin C\sin\omega\}$$

$$(3.)\qquad \alpha = \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial x};\qquad \beta = \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial y};\qquad \gamma = \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Für Q erhalten wir aber einen etwas anderen Ausdruck. Es ist nach Gleichung (5.) § 10 allgemein

$$Q = \iiint dx_1\, dy_1\, dz_1 \left\{\alpha_1 \frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial z_1}\right\},$$

wenn die Integrale sich über den ganzen Raum des Magneten erstrecken, also in unserem Falle über die von den Kugeln R_1 und R_2 eingeschlossene Kugelschale. Wir nehmen mit diesem Ausdruck dieselben Transformationen wie in § 12 vor, und beachten dabei, dass für eine beliebige Funktion $F = F(x_1, y_1, z_1)$ die Formel stattfindet:

$$\iiint dx_1\, dy_1\, dz_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} = \int dy_1\, dz_1 \left\{\Big[F\Big]_a^\alpha + \Big[F\Big]_\beta^b\right\}$$
$$= \iint dy_1\, dz_1 \left\{\Big[F\Big]_a^b - \Big[F\Big]_\alpha^\beta\right\},$$

hier sollen a, b und α, β diejenigen Punkte sein, in denen respective die *äussere* und *innere* Oberfläche von irgend einer mit der x-Axe parallelen Transversalen getroffen wird. Mit Rücksicht auf diese Formel erkennen wir leicht, dass der Werth von Q sich im gegenwärtigen Falle durch folgenden [mit (13.) § 12 analogen] Ausdruck darstellen lässt:

$$(4.)\qquad Q = \varkappa\int\frac{do_1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_i - \varkappa\int\frac{do_2}{\varrho_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_a,$$

wo die Integration nach do_1 über die ganze äussere Oberfläche, und die nach do_2 über die ganze innere sich ausdehnt; $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ ist der Diffe-

rentialquotient nach der Normale n an der äusseren Oberfläche, und $\overline{\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}}$ hat die analoge Bedeutung für die innere Oberfläche; und zwar soll n in beiden Fällen *dieselbe* Richtung, nämlich *die Richtung des Radius* haben; endlich bezeichnet ϱ_1 die Entfernung des Punktes abc, auf den das Potential sich bezieht, von dem Elemente do_1 der äusseren Oberfläche, und ϱ_2 die Entfernung desselben vom Elemente do_2 der innern Oberfläche.

Also ist in Gleichung (4.) zu setzen

$$(5.)\quad \begin{aligned} \varrho_1^2 &= R_1^2 + r^2 - 2\,rR_1\left(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\omega-\omega_1)\right) \\ \varrho_2^2 &= R_2^2 + r^2 - 2\,rR_2\left(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\omega-\omega_1)\right) \end{aligned}$$

$$do_1 = R_1^2 \sin\vartheta_1\cdot d\vartheta_1\cdot d\omega_1 \qquad do_2 = R_2^2\sin\vartheta_1\cdot d\vartheta_2\cdot d\omega_1$$

dabei ist die Integration in beiden Integralen für ω_1 von 0 bis 2π und für ϑ_1 von 0 bis π auszudehnen.

Diesen Gleichungen genügen wir durch folgende Funktion φ

$$(6.)\quad \begin{aligned} \varphi = r&\{M\cos\vartheta + N\sin\vartheta\cos\omega + P\sin\vartheta\sin\omega\} \\ &+ \frac{1}{r^2}\{m\cos\vartheta + n\sin\vartheta\cos\omega + p\sin\vartheta\sin\omega\}, \end{aligned}$$

worin M, N, P, m, n, p Constante sind, die noch näher bestimmt werden müssen.

Dadurch wird:

$$(6'.)\quad \begin{aligned} \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial n}} &= \left(M - \frac{2m}{R_1^3}\right)\cos\vartheta + \left(N - \frac{2n}{R_1^3}\right)\sin\vartheta\cos\omega + \left(P - \frac{2p}{R_1^3}\right)\sin\vartheta\sin\omega \\ \overline{\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}} &= \left(M - \frac{2m}{R_2^3}\right)\cos\vartheta + \left(N - \frac{2n}{R_2^3}\right)\sin\vartheta\cos\omega + \left(P - \frac{2p}{R_2^3}\right)\sin\vartheta\sin\omega \end{aligned}$$

und man findet

$$(7.)\quad \begin{aligned} Q = \varkappa\int do_1 &\frac{\left(M - \frac{2m}{R_1^3}\right)\cos\vartheta + \left(N - \frac{2n}{R_1^3}\right)\sin\vartheta\cos\omega + \left(P - \frac{2p}{R_1^3}\right)\sin\vartheta\sin\omega}{\sqrt{R_1^2 + r^2 - 2rR_1\left(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\omega-\omega_1)\right)}} \\ -\varkappa\int do_2 &\frac{\left(M - \frac{2m}{R_2^3}\right)\cos\vartheta + \left(N - \frac{2n}{R_2^3}\right)\sin\vartheta\cos\omega + \left(P - \frac{2p}{R_2^3}\right)\sin\vartheta\sin\omega}{\sqrt{R_2^2 + r^2 - 2rR_2\left(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\omega-\omega_1)\right)}}. \end{aligned}$$

Analog wie in § 18 führen wir zwei Linien ein:

$$(8.)\quad \begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\left(M - \frac{2m}{R_1^3}\right)^2 + \left(N - \frac{2n}{R_1^3}\right)^2 + \left(P - \frac{2p}{R_1^3}\right)^2} \\ S_2 &= \sqrt{\left(M - \frac{2m}{R_2^3}\right)^2 + \left(N - \frac{2n}{R_2^3}\right)^2 + \left(P - \frac{2p}{R_2^3}\right)^2} \end{aligned}$$

und erhalten alsdann:

$$(9.)\quad \begin{aligned} Q = \varkappa S_1 \int \frac{do_1 \cos(S_1, R)}{\sqrt{R_1^2 + r^2 - 2rR_1 \cos(r, R)}} \\ - \varkappa S_2 \int \frac{do_2 \cos(S_2, R)}{\sqrt{R_2^2 + r^2 - 2rR_2 \cos(r, R)}}. \end{aligned}$$

Diese Integrale lassen sich nach Gleichung (10.) § 18 zurückführen auf folgende

$$(9'.)\quad \begin{aligned} Q = 2\pi\varkappa \Big\{ R_1^2 S_1 \cos(r, S_1) \int_0^\pi \frac{du \sin u \cos u}{\sqrt{R_1^2 + r^2 - 2rR_1 \cos u}} \\ - R_2^2 S_2 \cos(r, S_2) \int_0^\pi \frac{du \sin u \cos u}{\sqrt{R_2^2 + r^2 - 2rR_2 \cos u}} \Big\}. \end{aligned}$$

Beachtet man, dass im ersten Integrale $r < R_1$ und im zweiten $r > R_2$ ist, und dass die Wurzelgrössen immer positiv sind, so ist das erste Integral nach der in § 18 ausgeführten Rechnung $= \frac{2}{3} \frac{r}{R_1^2}$, das zweite dagegen $= \frac{2}{3} \frac{R_2}{r^2}$; also erhält man:

$$(9''.)\quad Q = \frac{4}{3} \pi\varkappa \Big\{ r S_1 \cos(r, S_1) - \frac{R_2^3}{r^2} S_2 \cos(r, S_2) \Big\}$$

und durch Einführung der Werthe von S_1 und S_2 und der von $\cos(r, S_1)$ und $\cos(r, S_2)$ aus den obigen Gleichungen

$$(10.)\quad \begin{aligned} Q = \frac{4}{3}\pi\varkappa \Big\{ r \Big[\Big(M - \frac{2m}{R_1^3}\Big) \cos\vartheta + \Big(N - \frac{2n}{R_1^3}\Big) \sin\vartheta \cos\omega + \Big(P - \frac{2p}{R_1^3}\Big) \sin\vartheta \sin\omega \Big] \\ - \frac{R_2^3}{r^2} \Big[\Big(M - \frac{2m}{R_2^3}\Big) \cos\vartheta + \Big(N - \frac{2n}{R_2^3}\Big) \sin\vartheta \cos\omega + \Big(P - \frac{2p}{R_2^3}\Big) \sin\vartheta \sin\omega \Big] \Big\} \end{aligned}$$

oder einfacher

$$(10'.)\quad \begin{aligned} Q = \frac{4}{3}\pi\varkappa r \Big\{ \Big[M - \frac{2m}{R_1^3} - \Big(\frac{R_2}{r}\Big)^3 \Big(M - \frac{2m}{R_2^3}\Big) \Big] \cos\vartheta \\ + \Big[N - \frac{2n}{R_1^3} - \Big(\frac{R_2}{r}\Big)^3 \Big(N - \frac{2n}{R_2^3}\Big) \Big] \sin\vartheta \cos\omega \\ + \Big[P - \frac{2p}{R_1^3} - \Big(\frac{R_2}{r}\Big)^3 \Big(P - \frac{2p}{R_2^3}\Big) \Big] \sin\vartheta \sin\omega \Big\}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun aus den Gleichungen (2'.), (6.) und (10'.) die Werthe von V, φ und Q in die Gleichung (1.), so erhalten wir zur Bestimmung der Constanten folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi\varkappa r \Big\{ \Big[M - \frac{2m}{R_1^3} - \Big(\frac{R_2}{r}\Big)^3 \Big(M - \frac{2m}{R_2^3}\Big) \Big] \cos\vartheta \\ + \Big[N - \frac{2n}{R_1^3} - \Big(\frac{R_2}{r}\Big)^3 \Big(N - \frac{2n}{R_2^3}\Big) \Big] \sin\vartheta \cos\omega \\ + \Big[P - \frac{2p}{R_1^3} - \Big(\frac{R_2}{r}\Big)^3 \Big(P - \frac{2p}{R_2^3}\Big) \Big] \sin\vartheta \sin\omega \Big\} \\ + r \Big\{ \Big(M + \frac{m}{r^3}\Big) \cos\vartheta + \Big(N + \frac{n}{r^3}\Big) \sin\vartheta \cos\omega + \Big(P + \frac{p}{r^3}\Big) \sin\vartheta \sin\omega \Big\} \\ = r \Big\{ A \cos\vartheta + B \sin\vartheta \cos\omega + C \sin\vartheta \sin\omega \Big\}. \end{aligned}$$

Zum Bestehen dieser Gleichung ist erforderlich, dass

$$(11.)\quad \begin{aligned} A &= M(1+\tfrac{4}{3}\pi\varkappa) - \tfrac{8}{3}\pi\varkappa\frac{m}{R_1^3} & 0 &= -M\tfrac{4}{3}\pi\varkappa R_2^3 + m(1+\tfrac{8}{3}\pi\varkappa) \\ B &= N(1+\tfrac{4}{3}\pi\varkappa) - \tfrac{8}{3}\pi\varkappa\frac{n}{R_1^3} & 0 &= -N\tfrac{4}{3}\pi\varkappa R_2^3 + n(1+\tfrac{8}{3}\pi\varkappa) \\ C &= P(1+\tfrac{4}{3}\pi\varkappa) - \tfrac{8}{3}\pi\varkappa\frac{p}{R_1^3} & 0 &= -P\tfrac{4}{3}\pi\varkappa R_2^3 + p(1+\tfrac{8}{3}\pi\varkappa). \end{aligned}$$

Löst man diese Gleichungen auf, so ergiebt sich

$$(11'.)\quad \begin{aligned} M &= A\,\frac{1+\frac{8}{3}\pi\varkappa}{(1+\frac{4}{3}\pi\varkappa)(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa) - 2(\frac{4}{3}\pi\varkappa)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \\ m &= A\,\frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa R_2^3}{(1+\frac{4}{3}\pi\varkappa)(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa) - 2(\frac{4}{3}\pi\varkappa)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \end{aligned}$$

und daraus findet man N und n oder P und p, wenn man A mit B oder C vertauscht.

Demnach ist der vollständige Werth der Function φ

$$(12.)\quad \varphi = \frac{(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa)r + \frac{4}{3}\pi\varkappa\frac{R_2^3}{r^2}}{(1+\frac{4}{3}\pi\varkappa)(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa) - 2(\frac{4}{3}\pi\varkappa)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}\left\{A\cos\vartheta + B\sin\vartheta\cos\omega + C\sin\vartheta\sin\omega\right\}$$

oder auf rechtwinklige Coordinaten bezogen,

$$(12'.)\quad \varphi = \frac{(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa) + \frac{4}{3}\pi\varkappa\left(\frac{R_2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^3}{(1+\frac{4}{3}\pi\varkappa)(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa) - 2(\frac{4}{3}\pi\varkappa)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}\left\{Ax + By + Cz\right\},$$

woraus man durch Differentiation α, β und γ ableiten könnte.

§ 22.

Potential und Wirkung der durch constante Kräfte magnetisirten Hohlkugel.

Von grösserem Interesse wegen der Möglichkeit der Beobachtung ist die Frage nach dem Potential der Kugelschale auf einen Punkt ausserhalb ihrer eigenen Masse, also entweder ausserhalb der äusseren Kugel oder innerhalb des von der Kugelschale eingeschlossenen Hohlraumes; wir bezeichnen das erstere, das Potential auf einen ausserhalb liegenden Punkt abc mit Q_a, und das auf einen Punkt im innern Hohlraum mit Q_i: dann ist nach Formel (4.)

$$(13.)\quad \begin{aligned} Q_a &= \varkappa\int\frac{do_1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R_1} - \varkappa\int\frac{do_2}{\varrho_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R_2} & R_2 &< R_1 < r \\ Q_i &= \varkappa\int\frac{do_1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R_1} - \varkappa\int\frac{do_2}{\varrho_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=R_2} & r &< R_2 < R_1. \end{aligned}$$

Nach Formel (12.) ist für einen Punkt der Oberfläche

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=R_1} = \frac{(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa) - 2\cdot\frac{4}{3}\pi\varkappa\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}{(1+\frac{4}{3}\pi\varkappa)(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa) - 2(\frac{4}{3}\pi\varkappa)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \times$$

$$(14.) \qquad \times\left\{A\cos\vartheta_1 + B\sin\vartheta_1\cos\omega_1 + C\,\text{cin}\,\vartheta_1\sin\omega_1\right\}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=R_2} = \frac{1 - \frac{8}{3}\pi\varkappa - 2\cdot\frac{4}{3}\pi\varkappa}{(1+\frac{4}{3}\pi\varkappa)(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa) - 2(\frac{4}{3}\pi\varkappa)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \times$$

$$\times\left\{A\cos\vartheta_1 + B\sin\vartheta_1\cos\omega_1 + C\sin\vartheta_1\sin\omega_1\right\}.$$

wofür wir zur Abkürzung

$$(14'.) \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=R_1} = F_1\left\{A\cos\vartheta_1 + B\sin\vartheta_1\cos\omega_1 + C\sin\vartheta_1\sin\omega_1\right\}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=R_2} = F_2\left\{A\cos\vartheta_1 + B\sin\vartheta_1\cos\omega_1 + C\sin\vartheta_1\sin\omega_1\right\}$$

schreiben. Dadurch wird

$$Q = \varkappa\left\{F_1\int\frac{do_1}{\varrho_1}\left[A\cos\vartheta_1 + B\sin\vartheta_1\cos\omega_1 + C\sin\vartheta_1\sin\omega_1\right]\right.$$

$$\left. - F_2\int\frac{do_2}{\varrho_2}\left[A\cos\vartheta_1 + B\sin\vartheta_1\cos\omega_1 + C\sin\vartheta_1\sin\omega_1\right]\right\}$$

$$\text{d. i.: } Q = \varkappa\sqrt{A^2+B^2+C^2}\left\{F_1\int\frac{do_1\cos(R,\sqrt{A^2+B^2+C^2})}{\sqrt{R_1^2+r^2-2rR_1\cos(r,R)}} - \right.$$

$$\left. - F_2\int\frac{do_2\cos(R,\sqrt{A^2+B^2+C^2})}{\sqrt{R_2^2+r^2-2rR_2\cos(r,R)}}\right\}.$$

Nach den Gleichungen (10.) § 18 ist dieser Ausdruck gleich folgendem

$$Q = 2\pi\varkappa\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cos(r,\sqrt{A^2+B^2+C^2})\times$$

$$\times\left\{R_1^2F_1\int_0^\pi\frac{du\sin u\cos u}{\sqrt{R_1^2+r^2-2rR_1\cos u}} - R_2^2F_2\int_0^\pi\frac{du\sin u\cos u}{\sqrt{R_2^2+r^2-2rR_2\cos u}}\right\}.$$

Die Ausführung dieser Integrale giebt

$$Q_a = \tfrac{4}{3}\pi\varkappa\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cos(r,\sqrt{A^2+B^2+C^2})\,\frac{F_1R_1^3 - F_2R_2^3}{r^2}$$

$$Q_i = \tfrac{4}{3}\pi\varkappa\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cos(r,\sqrt{A^2+B^2+C^2})\{F_1 - F_2\}r$$

oder

$$Q_a = \tfrac{4}{3}\pi\varkappa\,\frac{F_1R_1^3 - F_2R_2^3}{r^2}\left\{A\cos\vartheta + B\sin\vartheta\cos\omega + C\sin\vartheta\sin\omega\right\}$$

$$Q_i = \tfrac{4}{3}\pi\varkappa\,(F_1 - F_2)\,r\,\left\{A\cos\vartheta + B\sin\vartheta\cos\omega + C\sin\vartheta\sin\omega\right\}.$$

Schreibt man für F_1 und F_2 wieder ihre ursprünglichen Bedeutungen, so erhält man als vollständige Ausdrücke für beide Potentiale

$$
(15.)\quad
\begin{aligned}
Q_a &= \tfrac{4}{3}\pi\varkappa \frac{(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa)(R_1^3-R_2^3)}{(1+\frac{4}{3}\pi\varkappa)(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa)-2(\frac{4}{3}\pi\varkappa)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \times \\
&\times \frac{1}{r^2}\left\{A\cos\vartheta + B\sin\vartheta\cos\omega + C\sin\vartheta\sin\omega\right\} \\
Q_i &= \tfrac{4}{3}\pi\varkappa \frac{2\cdot\frac{4}{3}\pi\varkappa\left(1-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\right)}{(1+\frac{4}{3}\pi\varkappa)(1+\frac{8}{3}\pi\varkappa)-2(\frac{4}{3}\pi\varkappa)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \times \\
&\times r\left\{A\cos\vartheta + B\sin\vartheta\cos\omega + C\sin\vartheta\sin\omega\right\}.
\end{aligned}
$$

Die Coefficienten beider Grössen erhalten eine einfachere Form, wenn man Nenner und Zähler durch $(1+\frac{4}{3}\pi\varkappa)^2$ dividirt und als Abkürzung, wie auch früher bei der vollen Kugel in § 18, die Bezeichnung

$$k = \frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}$$

einführt. Man findet alsdann:

$$
(16.)\quad
\begin{aligned}
Q_a &= \frac{k(1+k)(R_1^3-R_2^3)}{1+k-2k^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \times (A\cos\vartheta + B\sin\vartheta\cos\omega + C\sin\vartheta\sin\omega)\frac{1}{r^2} \\
Q_i &= \frac{2k^2\left(1-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\right)}{1+k-2k^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \times (A\cos\vartheta + B\sin\vartheta\cos\omega + C\sin\vartheta\sin\omega)\, r
\end{aligned}
$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$
(16'.)\quad
\begin{aligned}
Q_a &= \frac{k(1+k)(R_1^3-R_2^3)}{1+k-2k^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \times \frac{Ax+By+Cz}{r^3}, \quad \text{wo: } r^2 = x^2+y^2+z^2 \\
Q_i &= \frac{2k^2\left(1-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\right)}{1+k-2k^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3} \times (Ax+By+Cz).
\end{aligned}
$$

Beobachtungen existiren über diese Grössen so gut wie gar nicht. Es lassen sich aber aus diesen Gleichungen Schlüsse ziehen, welche wohl experimentell zu prüfen wären. In Formel (7.) § 19 gaben wir an, dass die Grösse k nahezu $= 1$ ist. Führen wir diesen angenäherten Werth ein, so ergiebt sich, dass

$$
(17.)\quad
\begin{aligned}
Q_a &= R_1^3 \frac{Ax+By+Cz}{r^3} \\
Q_i &= Ax+By+Cz
\end{aligned}
$$

ist.

Aus der ersten Gleichung würde folgen, dass die hohle Kugel auf einen Punkt ausserhalb genau so wirke wie die volle gleicher Grösse (vergl. (15'.) § 18). Dies hat man auch längst bei der Beobachtung bemerkt und daraus schliessen wollen, dass die magnetische

Flüssigkeit sich nur auf der Oberfläche des Magneten befinde. Dieses wäre richtig, wenn k genau 1 wäre. Setzen wir aber

$$k = 1 - \zeta,$$

so erhalten wir durch Entwickelung nach Potenzen des kleinen Bruchs ζ

$$Q_a = R_1{}^3 \frac{Ax + By + Cz}{r^3} \left\{ 1 - \frac{2 R_1{}^3 + R_2{}^3}{2 (R_1{}^3 - R_2{}^3)} \zeta + \cdots \right\}.$$

Man bemerkt, dass ζ um so mehr von Einfluss ist, je kleiner der Unterschied von R_1 und R_2 ist, d. h. je dünner die Kugelschale ist. Die Annäherung, $k = 1$, und die Wirkung der Kugelschale gleich der der vollen Kugel zu setzen, ist also nur erlaubt, wenn die Höhlung klein gegen die Dimensionen der Kugel ist.

Nach der Gleichung (16.) scheint es, dass sich ein Verhältniss von R_2 zu R_1, also eine Dicke der Schale angeben liesse, für welches Q_a, also auch die Wirkung der Kugelschale auf einen äusseren Punkt $= \infty$ würde. Man kann aber der Gleichung

$$1 + k - 2 k^2 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = 0$$

da $R_1 > R_2$ ist, nur durch Werthe von $k > 1$ genügen. Da nun eine unendliche Wirkung nicht stattfinden kann, so schliessen wir hieraus, dass k immer kleiner als 1 sein muss; davon ist wieder eine nothwendige Folge, dass $\varkappa$ positiv ist*), wie bereits Seite 34 auf einem anderen Wege bewiesen wurde.

Aus der zweiten Gleichung (17.)

$$Q_i = Ax + By + Cz,$$

welche der Annäherung $k = 1$ entspricht, folgt, dass die Componenten der Wirkung der durch den Erdmagnetismus magnetisirten Kugelschale auf jeden innern Punkt constant sind; und zwar haben sie dieselben, aber entgegengesetzte Werthe wie die vom Erdmagnetismus ausgeübten; an jeder Stelle des Hohlraumes würde also durch die Kugelschale die Wirkung des Erdmagnetismus vollständig destruirt werden, wenn k genau 1 wäre; in Wirklichkeit wird sie nur in hohem Grade geschwächt. Eine Magnetnadel, in diesen Raum gebracht, würde gar nicht mehr schwingen, wäre $k = 1$; da es nicht genau $= 1$ ist, so wird sie zwar noch oscilliren, aber sehr langsam. Das einfachste Mittel, die Wirkung des Erdmagnetismus auf eine Nadel zu schwächen, besteht daher darin, dass man, anstatt zwei entgegengesetzte Nadeln zu combiniren, den Multiplikator in eine Hohlkugel aus weichem Eisen einschliesst. Die kleinen Oeffnungen,

*) Denn $\varkappa$ hängt mit k zusammen durch die Relation (16.), Seite 49.

durch welche die Fäden hindurchgehen und die Ablesung gemacht werden müsste, würden keine bedeutende Aenderung bewirken. Die Dicke der Kugelschale aber müsste jedenfalls möglichst gross sein im Verhältniss zu ihrem äusseren Durchmesser.

§ 23.
Magnetischer Zustand eines durch constante Kräfte magnetisirten dreiaxigen Ellipsoids.

Die im Vorhergehenden für die *volle* und für die *hohle Kugel* gelöste Aufgabe lässt sich auf demselben Wege auch für ein beliebiges *dreiaxiges Ellipsoid* lösen. Dies beruht darauf, dass für *constante* magnetisirende Kräfte, also solche, deren Potential eine lineare Funktion der Coordinaten ist, die Annahme einer linearen Funktion für φ auch für Q eine lineare Funktion der Coordinaten ergiebt, so dass die drei in φ enthaltenen Constanten durch die drei in V vorkommenden, d. h. durch die Componenten der magnetisirenden Kräfte bestimmt werden können.

Der Beweis, dass, wenn φ eine lineare Funktion von x, y, z ist, auch das Potential Q eine solche Funktion sein muss, gründet sich darauf, dass Q angesehen werden kann als das Potential magnetischer Massen, welche mit gleichförmiger Dichtigkeit denjenigen Raum erfüllen, den die Oberfläche des Ellipsoids bei einer unendlich kleinen Verrückung beschreibt. Die Richtung dieser Verrückung hängt von den in φ enthaltenen Constanten ab. Der Raum ausserhalb der ursprünglich gegebenen und innerhalb der verrückten Oberfläche, der also dem Ellipsoid nur in seiner *zweiten* Lage angehört, ist mit homogener *positiver* Masse ausgefüllt zu denken; der gegenüberliegende, allein in der *ersten* Lage dem Ellipsoid angehörige Raum dagegen mit *negativer* von derselben Dichtigkeit.*) Die Höhe dieser Räume oder die Dicke der der Oberfläche aufgelagert zu denkenden Schicht homogener Masse wird gemessen durch das zwischen beiden Oberflächen, der ursprünglichen und der verrückten, liegende Stück der Normale, dessen Länge wir daher zu berechnen haben.

Wir stellen die Betrachtung zunächst etwas allgemeiner an. Es sei

$$\psi(x, y, z) = 0 \qquad (1.)$$

die Gleichung einer *beliebigen* Fläche. Diese werde um die sehr kleine Grösse ε in einer bestimmten Richtung aus ihrer ursprünglichen Lage

*) Man vergl. die analogen Auseinandersetzungen bei der *Kugel*, auf Seite 26.

herausgerückt; diese Richtung bildet mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus m, n, p seien. Denken wir uns nun, der Anfangspunkt der Coordinaten habe dieselbe Verrückung erlitten, so bleibt, auf diesen bezogen, die Gleichung der verrückten Fläche *dieselbe*, also ausgedrückt durch:

$$\psi(x, y, z) = 0.$$

Sind aber ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punkts dieser Fläche, bezogen auf den *ursprünglichen* Anfangspunkt, so haben wir

$$\begin{cases} \xi = x + \varepsilon m \\ \eta = y + \varepsilon n \\ \zeta = z + \varepsilon p. \end{cases}$$

Folglich wird die Gleichung der verrückten Fläche, ausgedrückt durch die auf den *alten* Anfangspunkt bezogenen Coordinaten, lauten:

$$(2.) \qquad \psi(\xi - \varepsilon m,\ \eta - \varepsilon n,\ \zeta - \varepsilon p) = 0.$$

Gehen wir jetzt längs der Normale N vom Punkte $\alpha\,(xyz)$ der ursprünglichen Fläche fort bis zu einem Punkte β der zweiten, so wachsen dadurch die Coordinaten um resp. $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$; sodass wir also für die Coordinaten dieser Punkte α und β folgende Formeln haben:

$$(2a.) \qquad \alpha \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \qquad \beta \begin{cases} \xi = x + \varDelta x = x + \varDelta N \cdot \cos(N, x) \\ \eta = y + \varDelta y = y + \varDelta N \cdot \cos(N, y) \\ \zeta = z + \varDelta z = z + \varDelta N \cdot \cos(N, z), \end{cases}$$

wo $\varDelta N$ das zwischen beiden Flächen liegende Stück der Normale N bezeichnet. Somit gewinnt die Gleichung (2.) folgende Gestalt:

$$\psi(x + \varDelta x - \varepsilon m,\ y + \varDelta y - \varepsilon n,\ z + \varDelta z - \varepsilon p) = 0,$$

oder, falls man nach den unendlich kleinen Grössen $(\varDelta x - \varepsilon m)$, $(\varDelta y - \varepsilon n)$, $(\varDelta z - \varepsilon p)$ entwickelt, folgende Gestalt:

$$\psi(x, y, z) + (\varDelta x - \varepsilon m)\frac{\partial \psi}{\partial x} + (\varDelta y - \varepsilon n)\frac{\partial \psi}{\partial y} + (\varDelta z - \varepsilon p)\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Es ist aber nach (1.): $\psi(x, y, z) = 0$. Somit ergiebt sich durch Einsetzen der in (2a.) für $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$ angegebenen Werthe:

$$\varDelta N\left[\cos(N, x)\frac{\partial \psi}{\partial x} + \cos(N, y)\frac{\partial \psi}{\partial y} + \cos(N, z)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]$$
$$= \varepsilon\left[m\frac{\partial \psi}{\partial x} + n\frac{\partial \psi}{\partial y} + p\frac{\partial \psi}{\partial z}\right].$$

Substituirt man hier für $\cos(N, x)$, $\cos(N, y)$, $\cos(N, z)$ die bekannten Werthe:

$$\cos(N, x) = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos(N, y) = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos(N, z) = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2}},$$

so erhält man:

$$\Delta N \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2} = \varepsilon \left[m \frac{\partial \psi}{\partial x} + n \frac{\partial \psi}{\partial y} + p \frac{\partial \psi}{\partial z}\right],$$

oder, falls man durch die Wurzelgrösse dividirt, und mit abermaliger Benutzung der für $\cos(N, x)$, $\cos(N, y)$, $\cos(N, z)$ angegebenen Formeln:

$$\Delta N = \varepsilon\,[m \cos(N, x) + n \cos(N, y) + p \cos(N, z)],$$

oder was dasselbe ist:

$$\Delta N = \varepsilon \cos(\varepsilon, N). \tag{3.}$$

Die Dicke des Zwischenraumes zwischen der ursprünglichen und der verrückten Fläche ist also gleich der Projektion der Verrückung ε auf die Normale.

Die der Fläche aufgelagerte *Masse* wird demnach, wenn D deren Dichtigkeit bezeichnet, den Werth haben:

$$D\varepsilon \int do \cdot \cos(\varepsilon, N) = D\varepsilon \int do \left[m \cos(N, x) + \cdots\right]. \tag{4.}$$

Sie ist negativ, wo der $\cos(\varepsilon, N)$ negativ ist. Legen wir also in der Richtung von ε irgend eine Linie durch die Fläche, so haben wir an einem Ende derselben positive, am andern negative Masse derselben Dichtigkeit, was den auf Seite 62 gemachten Bemerkungen entspricht.

Das *Potential* der aufgelagerten Massen*) ist

*) Diese aufgelagerten Massen spielen bei unserer ganzen Betrachtung nur eine auxiliäre Rolle. Jedenfalls aber wollen wir uns dieselben als *magnetische Massen* vorstellen. Bezeichnen wir also die einzelnen Elemente dieser Massen mit μ, so wird ihr Potential auf einen gegebenen Punkt von der *magnetischen Masse* 1 den Werth haben:

$$U = \Sigma \frac{\mu}{\varrho},$$

wo die ϱ die Abstände der einzelnen Elemente μ von jenem Punkte vorstellen. Und diese Formel ist in Einklang mit der Formel (5.) der folgenden Seite.

$$(5.)\qquad U = D\varepsilon\int\frac{do}{\varrho}\cos(\varepsilon, N) = D\varepsilon\int\frac{do}{\varrho}\left[m\cos(N, x) + \cdots\right].$$

Für das *Ellipsoid* würde dieses Potential direkt nicht ohne Schwierigkeit zu berechnen sein. Wir können aber seinen Werth angeben durch eine indirekte Betrachtung, indem wir uns dabei stützen auf den (später § 25 S. 73 zu beweisenden) Satz, *dass die parallel den Hauptaxen genommenen Componenten der Wirkung eines homogenen Ellipsoids auf einen Punkt im Innern proportional sind den (den Hauptaxen parallelen und auf den Mittelpunkt des Ellipsoids bezogenen) Coordinaten dieses Punkts.* Dabei ist selbstverständlich vorausgesetzt, dass die Masse des Ellipsoids nach dem Gravitationsgesetze wirke.

Es sei

$$(6.)\qquad \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{c}\right)^2 = 1.$$

die Gleichung des gegebenen Ellipsoids bezogen auf den Mittelpunkt und die Hauptaxen als Coordinatenaxen. Dann sind nach dem erwähnten Satze die in Rede stehenden Componenten

$$(7.)\qquad X = Mx, \qquad Y = Ny, \qquad Z = Pz,$$

wo xyz die Coordinaten eines Punktes im *Innern*, und M, N, P Constante bedeuten. Letztere sind positiv, wenn die Massen sich abstossen, negativ, wenn Anziehung, also eigentliche Gravitation stattfindet; sie hängen nur ab von den Hauptaxen a, b, c und der Dichtigkeit D der Masse. Und zwar ist $M = D\mathfrak{M}$, $N = D\mathfrak{N}$, $P = D\mathfrak{P}$, wo alsdann $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}$ nur noch von a, b, c abhängen; sodass wir also schreiben können:

$$(7'.)\qquad X = D\mathfrak{M}x, \qquad Y = D\mathfrak{N}y, \qquad Z = D\mathfrak{P}z.$$

Das Potential des Zwischenraums erhalten wir aus der Summe der Potentiale des verrückten und des ursprünglichen Ellipsoids, ersteres erfüllt gedacht mit positiver, letzteres mit negativer Masse derselben Dichtigkeit.*)

Aus den Gleichungen (7'.) folgt, wenn V das Potential des *ursprünglichen* Ellipsoids

$$(7''.)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -D\mathfrak{M}x, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -D\mathfrak{N}y, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -D\mathfrak{P}z;$$

und demgemäss:

*) Denn alsdann wird in jedem gemeinschaftlichen Raumelement sich ebensoviel anziehende als abstossende Masse befinden, und folglich der gemeinschaftliche Raum *keine* Wirkung ausüben. Mit andern Worten: Die vorhandene Wirkung wird lediglich herrühren von dem in der angegebenen Weise mit homogener Masse erfüllten Zwischenraum.

$$(8.)\qquad V = \text{Const} - \frac{D}{2}\left\{\mathfrak{M}x^2 + \mathfrak{N}y^2 + \mathfrak{P}z^2\right\}.$$

Um hieraus das Potential V' des *verrückten* Ellipsoids zu erhalten, können wir uns denken, das Ellipsoid sei an seiner Stelle geblieben, aber der Punkt x, y, z, auf welchen sich das Potential bezieht, in entgegengesetzter Richtung verrückt worden, so dass seine Coordinaten jetzt

$$x - \varepsilon m, \qquad y - \varepsilon n, \qquad z - \varepsilon p$$

sind.

V' ist dieselbe Funktion dieser Argumente, wie V von x, y, z. Also ist, wenn wir V und V' als Funktionszeichen benutzen:

$$V'(x, y, z) = V(x - \varepsilon m, y - \varepsilon n, z - \varepsilon p)$$

und durch Entwickelung

$$(9'.)\qquad V'(x, y, z) = V(x, y, z) = \varepsilon\left[m\frac{\partial V}{\partial x} + n\frac{\partial V}{\partial y} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right].$$

Fügen wir dazu das Potential des mit negativer Masse erfüllten *ursprünglichen* Raumes:

$$-V(x, y, z),$$

so erhalten wir das gesuchte Potential U *des Zwischenraumes*:

$$(9.)\qquad U = V' - V = -\varepsilon\left[m\frac{\partial V}{\partial x} + n\frac{\partial V}{\partial y} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right].$$

Dieser Ausdruck gilt ganz allgemein, unabhängig von der Gestalt der betrachteten Fläche. Für den speziellen Fall des *Ellipsoids* erhalten wir aus (9.) und (7″.) sofort

$$(10.)\qquad U = D\varepsilon\,[m\mathfrak{M}x + n\mathfrak{N}y + p\mathfrak{P}z].$$

Nach (5.) ist aber andererseits:

$$(11.)\qquad U = D\varepsilon\int\frac{do}{\varrho}\cos(N, \varepsilon),$$

$$\text{d. i.: } U = D\varepsilon\int\frac{do}{\varrho}\left[m\cos(N, x) + n\cos(N, y) + p\cos(N, z)\right].$$

Diess vorausgeschickt, wenden wir uns zu unserer eigentlichen Aufgabe. Für das Potential des magnetischen Ellipsoids haben wir ganz allgemein (nach S. 35) die Formel:

$$Q = \varkappa\int\frac{do}{\varrho}\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)_i;$$

diese aber gewinnt, wenn wir φ linear annehmen:

$$(11'.)\qquad \varphi = A_1x + B_1y + C_1z,$$

folgende Gestalt:

(12.) $$Q = \varkappa \int \frac{do}{\varrho} \left[A_1 \cos(N, x) + B_1 \cos(N, y) + C_1 \cos(N, z) \right].$$

Damit nun dieses magnetische Potential des Ellipsoids identisch werde mit dem vorhin besprochenen Potential U (11.), haben wir m, n, p so zu bestimmen, dass

(13.) $$\begin{cases} \varepsilon D m = \varkappa A_1 \\ \varepsilon D n = \varkappa B_1 \\ \varepsilon D p = \varkappa C_1 \end{cases}$$

wird. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist $Q = U$, also, falls man für U den Werth (10.) substituirt und dabei die Relationen (13.) berücksichtigt:

(14.) $$Q = \varkappa \left[A_1 \mathfrak{M} x + B_1 \mathfrak{N} y + C_1 \mathfrak{P} z \right].$$

Hiemit sind wir zu dem vorhin angekündigten Resultate gelangt, dass für ein lineares Potential der äusseren Kräfte:

$$V = -\left[Ax + By + Cz \right]$$

die Annahme eines linearen Ausdrucks für φ ausreichend ist. In der That: legt man für φ den Ausdruck (11'.) zu Grunde, so ergiebt sich für Q der Ausdruck (14.). Substituirt man aber diese Ausdrücke, sowie auch den für V in die allgemeine Formel:

$$V + \varphi + Q = 0,$$

so erhält man:

$$-\left[Ax + By + Cz\right] + \left[A_1 x + B_1 y + C_1 z\right] + \varkappa\left[A_1 \mathfrak{M} x + B_1 \mathfrak{N} y + C_1 \mathfrak{P} z\right] = 0.$$

Aus dieser Gleichung aber, welche stattfinden muss für beliebige Werthe von x, y, z, folgt sofort:

(15.) $$\begin{cases} A_1 = \dfrac{A}{1 + \varkappa \mathfrak{M}}, \\ B_1 = \dfrac{B}{1 + \varkappa \mathfrak{N}}, \\ C_1 = \dfrac{C}{1 + \varkappa \mathfrak{P}}. \end{cases}$$

Somit folgt aus (11'.):

(16.) $$\varphi = \frac{Ax}{1 + \varkappa \mathfrak{M}} + \frac{By}{1 + \varkappa \mathfrak{N}} + \frac{Cz}{1 + \varkappa \mathfrak{P}},$$

und weiter:

(17.) $$\begin{cases} \alpha = \varkappa \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\varkappa A}{1 + \varkappa \mathfrak{M}} \\ \beta = \varkappa \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\varkappa B}{1 + \varkappa \mathfrak{N}} \\ \gamma = \varkappa \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \dfrac{\varkappa C}{1 + \varkappa \mathfrak{P}} \end{cases}$$

Durch die Wirkung constanter Kräfte wird also das Ellipsoid gleichförmig magnetisirt, welche Gestalt es auch habe. Die Richtung der magnetischen Axe aber fällt *nicht* mehr (wie bei der Kugel) zusammen mit der Resultante der magnetisirenden Kräfte.

§ 24.
Wirkung eines durch constante Kräfte magnetisirten Ellipsoids auf äussere Punkte.

Der zweite Theil unserer Aufgabe besteht in der Bestimmung der Wirkung des durch constante Kräfte magnetisirten Ellipsoids auf einen *äusseren* Punkt. Wir haben allgemein nach Gleichung (4.) S. 35 für irgend einen magnetisirten Körper

$$Q_a = \varkappa \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\varphi}{dN}\right)_i$$

also nach Gleichung (11'.) S. 65 für das Ellipsoid:

$$(1.)\quad Q_a = \varkappa \int \frac{do}{\varrho_a} \Big[A_1 \cos(N,x) + B_1 \cos(N,y) + C_1 \cos(N,z)\Big],$$

wo: $\varrho^2_a = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$.

Dieses Potential Q_a wird aber identisch mit dem früher betrachteten Potential U [Seite 64, (5.)], sobald man die damaligen Constanten D, ε, m, n, p sich den Bedingungen unterworfen denkt:

$$(2.)\quad \varkappa A_1 = D\varepsilon m, \quad \varkappa B_1 = D\varepsilon n, \quad \varkappa C_1 = D\varepsilon p.$$

Wir können also Q_a ansehen als die Differenz der Potentialwerthe des gegebenen und des um ε verrückten Ellipsoids, jedes derselben erfüllt gedacht mit einer homogenen Masse von der Dichtigkeit D. Bezeichnen wir also diese beiden Potentialwerthe respective mit V und V', so wird:

$$(2'.)\quad Q_a = V' - V.$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach den Coordinaten a, b, c des Punktes a sofort:

$$-\frac{\partial Q_a}{\partial a} = -\frac{\partial V'}{\partial a} - \left(-\frac{\partial V}{\partial a}\right), \quad \text{ferner } -\frac{\partial Q_a}{\partial b} = \text{etc. etc.}$$

Bezeichnet man also die den Potentialen Q_a, V und V' entsprechenden Kraftcomponenten resp. mit X, Y, Z, ferner mit R, S, T und R', S', T', so wird:

$$(2''.)\quad X = R' - R, \quad Y = S' - S, \quad Z = T' - T.$$

Die Grössen $R = -\frac{\partial V}{\partial a}$, $S = -\frac{\partial V}{\partial b}$, $T = -\frac{\partial V}{\partial c}$ sind alsdann die

Componenten derjenigen Wirkung, welche auf den Punkt abc ausgeübt wird von dem *gegebenen* Ellipsoid, dasselbe erfüllt gedacht mit einer homogenen Masse von der Dichtigkeit D. Und andererseits sind R', S', T' die Componenten, welche auf denselben Punkt abc von eben demselben Ellipsoid ausgeübt werden, sobald dasselbe zuvor aus seiner ursprünglichen Lage um die kleine Grösse ε in der Richtung m, n, p *verschoben* ist. Statt aber das Ellipsoid zu verschieben, können wir eben so gut den Punkt abc in der *entgegengesetzten* Richtung verschieben. Demgemäss können R', S', T' aus den Ausdrücken R, S, T dadurch erhalten werden, dass man in diesen letztern die Argumente a, b, c resp. mit $(a - \varepsilon m)$, $(b - \varepsilon n)$, $(c - \varepsilon p)$ vertauscht. Demgemäss erhält man z. B.:

$$R' = R - \varepsilon m \frac{\partial R}{\partial a} - \varepsilon n \frac{\partial R}{\partial b} - \varepsilon p \frac{\partial R}{\partial c}.$$

Und hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf (2''.) die erste Formel des folgenden Systems:

$$(3.)\qquad \begin{cases} X = R' - R = -\varepsilon\left[m\frac{\partial R}{\partial a} + n\frac{\partial R}{\partial b} + p\frac{\partial R}{\partial c}\right] \\ Y = S' - S = -\varepsilon\left[m\frac{\partial S}{\partial a} + n\frac{\partial S}{\partial b} + p\frac{\partial S}{\partial c}\right] \\ Z = T' - T = -\varepsilon\left[m\frac{\partial T}{\partial a} + n\frac{\partial T}{\partial b} + p\frac{\partial T}{\partial c}\right]. \end{cases}$$

Berücksichtigen wir, dass R, S, T die negativen partiellen Differentialquotienten nach abc einer und derselben Funktion V (des Potentials eines homogenen Ellipsoides) vorstellen, dass nämlich

$$(4.)\qquad R = -\frac{\partial V}{\partial a},\quad S = -\frac{\partial V}{\partial b},\quad T = -\frac{\partial V}{\partial c},$$

ist, und dass folglich die Relationen stattfinden:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial b},\quad \frac{\partial T}{\partial b} = \frac{\partial S}{\partial c},\quad \frac{\partial R}{\partial c} = \frac{\partial T}{\partial a},$$

so können wir offenbar die Formeln (3.) auch so schreiben:

$$(5.)\qquad \begin{aligned} X &= -\varepsilon\frac{\partial}{\partial a}\left(mR + nS + pT\right), \\ Y &= -\varepsilon\frac{\partial}{\partial b}\left(mR + nS + pT\right), \\ Z &= -\varepsilon\frac{\partial}{\partial c}\left(mR + nS + pT\right). \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir für das den Kräften X, Y, Z entsprechende Potential Q_a den Werth:

$$(6.)\qquad Q_a = \varepsilon\,(mR + nS + pT),$$

oder, falls wir für εm, εn, εp die aus Seite 67 (2.) und dann weiter aus Seite 66 (15.) sich ergebenden Werthe substituiren:

(7.) $$Q_a = \frac{\varkappa}{D}\left[\frac{AR}{1+\varkappa\mathfrak{M}} + \frac{BS}{1+\varkappa\mathfrak{N}} + \frac{CT}{1+\varkappa\mathfrak{P}}\right].$$

R, S, T sind die Componenten derjenigen Wirkung, welche auf den äusseren Punkt a oder abc ausgeübt wird von dem gegebenen Ellipsoid, dasselbe erfüllt gedacht mit einer homogenen Masse von der Dichtigkeit D. Demgemäss repräsentiren $\mathfrak{R} = \frac{R}{D}$, $\mathfrak{S} = \frac{S}{D}$; $\mathfrak{T} = \frac{T}{D}$ dieselben Componenten für den Fall, dass die Dichtigkeit jener das Ellipsoid erfüllenden Masse = 1 ist. Und unter Anwendung dieser Componenten $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ gewinnt die Formel (7.) folgende Gestalt:

(7'.) $$Q_a = \varkappa\left[\frac{A\mathfrak{R}}{1+\varkappa\mathfrak{M}} + \frac{B\mathfrak{S}}{1+\varkappa\mathfrak{N}} + \frac{C\mathfrak{T}}{1+\varkappa\mathfrak{P}}\right].$$

Hier sind $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ gewisse dem Ellipsoid eigenthümliche Constante, hingegen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ gewisse Funktionen der Coordinaten a, b, c des äusseren Punktes.

§ 25.

Componenten der Wirkung eines homogenen Ellipsoids auf einen innern Punkt.

Um von den Formeln der vorhergehenden Paragraphen Gebrauch machen zu können, müssen wir die Grössen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ bestimmen, oder (mit andern Worten) die Wirkung eines *homogenen Ellipsoids* auf einen innerhalb oder ausserhalb gelegenen Punkt xyz berechnen. Denken wir uns nämlich das Ellipsoid seinem ganzen Raume nach erfüllt von einer *homogenen magnetischen Masse von der Dichtigkeit* 1, und denken wir uns andererseits im Punkte xyz die *Einheit der magnetischen Masse* concentrirt, so bezeichnen entweder $\mathfrak{M}x$, $\mathfrak{N}y$, $\mathfrak{P}z$ oder $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ die Componenten der von jenem Ellipsoid auf den Punkt ausgeübten Wirkungen, je nachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb des Ellipsoids liegt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Hauptaxen des Ellipsoids zu Coordinatenaxen genommen sind.

Da bekanntlich eine von ähnlichen und concentrischen Ellipsoidflächen begrenzte *homogene Schale* auf einen Punkt des eingeschlossenen Hohlraums *keine* Wirkung ausübt, so wird offenbar die von einem *vollen homogenen Ellipsoid* auf einen innern Punkt ausgeübte Wirkung lediglich herrühren von demjenigen Theil der Masse, welcher umschlossen wird von einer durch den Punkt gelegten Ellipsoidfläche, die mit der Oberfläche des gegebenen Ellipsoids ähnlich und concentrisch ist.

Wir beschreiben um den Punkt xyz der Ellipsoidoberfläche eine Kugel vom Radius 1, bezeichnen das Oberflächenelement dieser Kugel mit do, und den vom Punkte xyz nach der Peripherie des Elementes do gehenden unendlich dünnen Kegel mit K_{do}. Auch denken wir uns diesen Kegel in solcher Lage, dass er *innerhalb* des gegebenen Ellipsoids sich befindet. Beschreiben wir nun um xyz zwei Kugelflächen mit den Radien r und $(r + dr)$, so wird das zwischen diesen beiden Flächen gelegene Volumenelement des Kegels K_{do} gleich $r^2\,do\,dr$. Und die in diesem Volumenelement vorhandene *Masse* des gegebenen homogenen Ellipsoides wird, da wir ihre Dichtigkeit $= 1$ uns denken*), ebenfalls $= r^2\,do\,dr$ sein. Folglich hat die Wirkung dieses Massenelements auf den Punkt xyz den Werth:

$$\frac{r^2\,do\,dr}{r^2} = do\,dr.$$

Die Richtung dieser Wirkung ist entgegengesetzt mit der Richtung des Kegels K_{do}, und hat also die Richtungscosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, falls man die Richtungcosinus des Kegels selber (d. i. der von xyz nach do laufenden Linie) mit $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$, $-\cos\gamma$ bezeichnet. Demgemäss ist die x-Componente der in Rede stehenden Wirkung gleich

$$dr\,do\cdot\cos\alpha;$$

und folglich wird die x-Componente derjenigen Wirkung, welche von dem *ganzen Ellipsoid* auf den ganzen Punkt xyz ausgeübt wird, den Werth haben:

$$(1.)\qquad X = \int do \int_0^{r_1} dr\cos\alpha,\quad \text{d. i.} = \int do\, r_1 \cos\alpha,$$

wo r_1 die *Länge* des Kegels K_{do} vorstellt, denselben gerechnet gedacht von seiner Spitze xyz bis zu derjenigen Stelle, wo er die gegebene Ellipsoidoberfläche (zum zweiten Mal) schneidet. Die Integration nach do ist [in der Formel (1.)] offenbar nicht über die ganze um xyz beschriebene Kugelfläche, sondern nur über die eine *Hälfte* derselben auszudehnen. Und zwar wird diese Hälfte begrenzt von der in xyz an die gegebene Ellipsoidfläche gelegten Tangentialebene.

Soweit ist übrigens unsere Betrachtung *allgemein* gültig, nicht nur für den Fall eines Ellipsoids, sondern auch für einen Körper, der

*) Bei der ganzen Betrachtung ist festzuhalten, dass das Ellipsoid erfüllt sein soll von einer *homogenen magnetischen Masse von der Dichtigkeit* 1, und dass andererseits im Punkte xyz die *magnetische Masse Eins* concentrirt gedacht werden soll.

von irgend welcher *beliebigen* Fläche begrenzt wird. — Ist nun der Körper ein Ellipsoid, seine Oberfläche also dargestellt durch die Gleichung:

$$(2.)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

und verstehen wir, nach wie vor, unter xyz speziell denjenigen Punkt dieser Oberfläche, auf den die Wirkung gesucht wird, so werden die Coordinaten desjenigen Punktes, in welchem der Kegel K_{do} die Oberfläche (zum zweiten Mal) schneidet, die Werthe haben $(x - r_1 \cos\alpha)$, $(y - r_1 \cos\beta)$, $(z - r_1 \cos\gamma)$. Diese Coordinaten müssen, ebenso wie die Coordinaten x, y, z des eigentlich betrachteten Punktes, der Gleichung (2.) der Oberfläche Genüge leisten. Somit folgt:

$$(3.)\qquad \begin{gathered}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,\\ \left(\frac{x-r_1\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{y-r_1\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{z-r_1\cos\gamma}{c}\right)^2=1;\end{gathered}$$

und hieraus durch Subtraktion:

$$(4.)\quad -2r_1\left[\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}\right]+r_1^2\left[\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{b}\right)^2\right]=0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $r_1 = 0$; diese bezieht sich auf den Punkt xyz. Die *andere* ist:

$$(5.)\qquad r_1=\frac{2\left[\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}\right]}{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2}.$$

Somit folgt aus (1.)

$$(6.)\qquad X=2\int do\cos\alpha\left\{\frac{\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}}{\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}}\right\}.$$

Die Integration ist auszudehnen über die *eine Hälfte* der um xyz beschriebenen Kugelfläche.*) Für die *andere* Hälfte würde aber die Ausführung des Integrals denselben Werth ergeben, da jedem do, dessen Lage durch

$$\cos\alpha,\qquad \cos\beta,\qquad \cos\gamma$$

bestimmt ist, ein anderes do diametral gegenüber liegt, dem die gleichen aber entgegengesetzten Werthe:

*) Diese Hälfte schneidet die gegebene Ellipsoidoberfläche, und wird begrenzt von der im Punkte xyz an jene Oberfläche gelegten Tangentialebene.

$$-\cos\alpha, \qquad -\cos\beta, \qquad -\cos\gamma$$

angehören. Unter dem Integralzeichen kommen aber nur *Produkte* dieser Grössen vor; und es hat also wirklich das Integral für beide Halbkugeln *denselben* Werth. Folglich können wir schreiben:

$$(7.) \qquad X = \int do \cos\alpha \left\{ \frac{\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2}}{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2} \right\},$$

die Integration ausgedehnt über die *ganze* Kugeloberfläche.

Denkt man sich durch den Mittelpunkt xyz der Kugel eine Ebene E gelegt, parallel zur yz-Ebene, so wird das Produkt $(\cos\alpha \cdot \cos\beta)$ für je zwei Elemente do, die zu einander symmetrisch liegen in Bezug auf jene Ebene E *entgegengesetzte* Werthe haben. Gleiches gilt vom Produkt $(\cos\alpha \cdot \cos\gamma)$. Demgemäss reducirt sich der Ausdruck (7.) auf

$$(7'.) \qquad X = \frac{x}{a^2} \int \frac{do \cos^2\alpha}{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2}$$

die Integration nach wie vor ausgedehnt über die *ganze* Kugeloberfläche.

Statt α, β, γ führen wir andere Winkel ein: ϑ und φ, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\vartheta, \\ \cos\beta &= \sin\vartheta\cos\varphi, \\ \cos\gamma &= \sin\vartheta\sin\varphi, \\ do &= \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi. \end{aligned}$$

Alsdann ergiebt sich sofort:

$$(8.) \; X = \frac{x}{a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right)\sin^2\varphi},$$

oder da die trigonometrischen Funktionen von φ nur im Quadrate vorkommen,

$$(9.) \; X = \frac{4x}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right)\sin^2\varphi}.$$

Es ist aber

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{A + B\,\mathrm{tang}^2\varphi} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dz}{A + B z^2} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \left[\mathrm{arc.tang}\, z \sqrt{\frac{B}{A}} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{AB}}.$$

Somit folgt:

$$(10.)\qquad X = \frac{2\pi x}{a^2} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}}\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}}} = \mathfrak{M}x,$$

und entsprechend:

$$(11.)\qquad Y = \frac{2\pi y}{b^2} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}}\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{a^2}}} = \mathfrak{N}y,$$

$$(12.)\qquad Z = \frac{2\pi z}{c^2} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}{\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{c^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{a^2}}\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{c^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}}} = \mathfrak{P}z.$$

Die Ausführung der Integration giebt die gesuchten Werthe der Constanten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, die, wie die Ausdrücke zeigen, nur noch von den Axen a, b, c abhängen, oder vielmehr nur noch von *deren Verhältniss zu einander;* also z. B. für *ähnliche* Ellipsoide *dieselben* sein werden.

Hiermit ist der auf Seite 64 *behauptete Satz bewiesen, dass die Componenten der Wirkung auf einen innern Punkt proportional den Coordinaten desselben sind.* Die Integrale sind im Allgemeinen elliptische; für den speziellen Fall jedoch, dass das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, lassen sie sich durch trigonometrische und logarithmische Funktionen darstellen.

§ 26.

Fortsetzung. Rotationsellipsoid.

Ist $a = b$, also das Ellipsoid ein *durch Rotation um die z-Axe entstandenes,* so werden die Componenten der Wirkung auf einen inneren Punkt:

$$(1.)\qquad X = \mathfrak{M}x = \frac{2\pi x}{a} \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)\cos^2\vartheta}},$$

$$(2.)\qquad Y = \mathfrak{N}y = \frac{2\pi y}{a}\int_0^\pi \frac{d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)\cos^2\vartheta}},$$

$$(3.)\qquad Z = \mathfrak{P}z = \frac{2\pi z}{c^2}\int_0^\pi \frac{d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}{\frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\vartheta};$$

also $X = Y$ und ebenso auch $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$. Wir führen die *numerische Excentricität* der erzeugenden Ellipse ein

$$(4.)\qquad \frac{a^2 - c^2}{c^2} = \lambda^2;$$

und erhalten dadurch:

$$(5.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}x &= X = 2\pi x \frac{c}{a}\int_0^\pi \frac{d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}{\sqrt{1 - \frac{c^2\lambda^2}{a^2}\cos^2\vartheta}} = 2\pi x \frac{c}{a}\int_{-1}^{+1} \frac{v^2\,dv}{\sqrt{1 - \frac{c^2\lambda^2}{a^2}v^2}}, \\ \mathfrak{P}z &= Z = 2\pi z \frac{a^2}{c^2}\int_0^\pi \frac{d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}{1 + \lambda^2\cos^2\vartheta} = 2\pi z \frac{a^2}{c^2}\int_{-1}^{+1} \frac{v^2\,dv}{1 + \lambda^2 v^2}. \end{aligned}$$

Bei der weiteren Rechnung ist zu unterscheiden, ob λ^2 positiv oder negativ, das Rotationsellipsoid also ein abgeplattetes oder gestrecktes ist.

Für ein *abgeplattetes*, also für $a > c$, d. i. $\lambda^2 > 0$, ergiebt sich:

$$\begin{aligned} (6.)\qquad & \mathfrak{M} = \frac{2\pi}{\lambda^3}\left\{(1 + \lambda^2)(\text{arc.tang}\,\lambda) - \lambda\right\}, \\ (7.)\qquad & \mathfrak{P} = 4\pi\frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3}\left\{\lambda - (\text{arc.tang}\,\lambda)\right\}, \end{aligned} \qquad \begin{cases} X = \mathfrak{M}x, \\ Y = \mathfrak{M}y, \\ Z = \mathfrak{P}z, \end{cases}$$

und für ein *verlängertes* Ellipsoid, also für $a < c$, d. i. $\lambda < 0$, ergeben sich, falls man

$$\frac{a^2 - c^2}{c^2} = -\lambda_1^2, \text{ d. i. } \frac{c^2 - a^2}{c^2} = \lambda_1^2$$

setzt, folgende Formeln:

$$\begin{aligned} (8.)\qquad & \mathfrak{M} = \frac{2\pi}{\lambda_1^3}\left\{(1 - \lambda_1^2)\left(\log\sqrt{\frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1}}\right) + \lambda_1\right\}, \\ (9.)\qquad & \mathfrak{P} = -4\pi\frac{1 - \lambda_1^2}{\lambda_1^3}\left\{\left(\log\sqrt{\frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1}}\right) + \lambda_1\right\}, \end{aligned} \qquad \begin{cases} X = \mathfrak{M}x, \\ Y = \mathfrak{M}y, \\ Z = \mathfrak{P}z. \end{cases}$$

Man erhält diese Ausdrücke (8.) und (9.) auch dadurch aus (6.) und (7.), dass man $\lambda_1\sqrt{-1}$ statt λ schreibt.

Mittelst der gefundenen Werthe von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ können wir jetzt den magnetischen Zustand des durch constante Kräfte magnetisirten Ellipsoids vollständig angeben, so wie auch seine Wirkung auf einen Punkt im *Innern.*

§ 27.

Die Componenten der Wirkung eines homogenen Ellipsoids auf einen äussern Punkt. Ivory'scher Satz.

Die Bestimmung von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ (der Componenten der Wirkung eines homogenen Ellipsoids auf einen *äussern* Punkt) ist ein in der Geschichte der Attraction berühmtes Problem. Seit *d'Alembert* und *Euler* haben sich fast alle grossen Mathematiker, unter andern *Lagrange, Legendre, Laplace* mit demselben beschäftigt. Die vielen scharfsinnigen Untersuchungen über dasselbe hat ein englischer Geometer, *Ivory,* überflüssig gemacht, dem es gelang, die Aufgabe zu einer sehr einfachen zu machen. Er zeigte, dass sich für jedes gegebene Ellipsoid immer ein anderes construiren lässt, dessen Oberfläche durch den Punkt geht, auf den die Wirkung gesucht wird, und das auf denselben *dieselbe Wirkung* ausübt, wie das gegebene Ellipsoid; dass also auch die Wirkung auf einen *äussern* Punkt zurückgeführt werden kann auf die auf einen Punkt *der Oberfläche* ausgeübte. Diese Zurückführung heisst der *Ivory'sche Satz.*

Derselbe beruht auf der Betrachtung *confocaler* Ellipsoide, d. h. solcher, welche den Mittelpunkt, die Richtung der Axen und die Brennpunkte mit einander gemein haben, deren Hauptschnitte also dieselben linearen Excentricitäten (ε und η) besitzen.

Zwei Ellipsoide, deren auf den gemeinschaftlichen Mittelpunkt bezogene Gleichungen lauten:

$$(1.)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

$$(2.)\qquad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c_1}\right)^2 = 1,$$

sind demnach *confocal,* wenn die Relationen stattfinden:

$$(3.)\qquad a^2 = c^2 - \varepsilon^2, \qquad b^2 = c^2 - \eta^2,$$

$$(4.)\qquad a_1{}^2 = c_1{}^2 - \varepsilon^2, \qquad b_1{}^2 = c_1{}^2 - \eta^2.$$

Durch diese aber nehmen die Gleichungen (1.) und (2.) folgende Gestalt an:

$$(1'.)\qquad \frac{x^2}{c^2 - \varepsilon^2} + \frac{y^2}{c^2 - \eta^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

(2'.) $$\frac{x_1^2}{c_1^2 - \varepsilon^2} + \frac{y_1^2}{c_1^2 - \eta^2} + \frac{z_1^2}{c_1^2} = 0.$$

Jedes dieser Ellipsoide ist demnach, wenn ε und η *gegeben* sind, nur noch abhängig von einem variablen Parameter, nämlich von c, resp. c_1. Auch wird z. B. das Ellipsoid (2'.) völlig bestimmt sein, sobald die Coordinaten eines einzigen Punktes seiner Oberfläche x_1, y_1, z_1 gegeben sind; da durch diese nach Gleichung (2'.) das c_1 sich bestimmt.

Zwei *correspondirende Punkte* verschiedener confocalen ellipsoidischen Flächen sind solche, deren Ordinaten sich verhalten, wie die ihnen parallelen Hauptaxen, also z. B. die Punkte xyz und $x_1 y_1 z_1$, falls

(5.) $$\frac{x}{a} = \frac{x_1}{a_1}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{y_1}{b_1}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{z_1}{c_1}.$$

Auf ellipsoidischen Flächen gezogene Curven heissen correspondirend, wenn sie fortwährend correspondirende Punkte durchlaufen, oder mit anderen Worten, wenn ihre Elemente der Reihe nach correspondiren. — Correspondirende Flächenstücke endlich sind solche, welche erzeugt werden durch die Bewegung correspondirender Curven.

Die Projektionen correspondirender Flächenstücke auf die drei Hauptebenen verhalten sich wie die Produkte der in der betreffenden Hauptebene liegenden Axen. Sind nämlich

$$\begin{cases} dx\ dy\,, \\ dx_1\ dy_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} dy\ dz\,, \\ dy_1\ dz_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} dz\ dx\,, \\ dz_1\ dx_1 \end{cases}$$

die Projektionen correspondirender Flächenelemente, so ist nach (5.):

(6.) $$\frac{dx\,dy}{ab} = \frac{dx_1\,dy_1}{a_1 b_1}, \qquad \frac{dy\,dz}{bc} = \frac{dy_1\,dz_1}{b_1 c_1}, \qquad \frac{dz\,dx}{ca} = \frac{dz_1\,dx_1}{c_1 a_1}.$$

Und da dieses von allen correspondirenden Elementen gilt, so gilt es auch für *endliche* correspondirende Flächen.

Der Hauptsatz, auf dem das *Ivory'sche Theorem* beruht, ist der, *dass die Entfernung zweier beliebigen Punkte confocaler Ellipsoidflächen immer gleich ist der Entfernung ihrer correspondirenden Punkte von einander.* — Die gegebenen Punkte seien:

(P.) $$x,\ y,\ z \quad \text{und} \quad x_1,\ y_1,\ z_1;$$

und ihre correspondirenden, respektive:

(Q.) $$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1 \quad \text{und} \quad \xi,\ \eta,\ \zeta.^{*})$$

Dann ist nach (5.):

*) Es soll also z. B. der Punkt $\xi\eta\zeta$ in Correspondenz stehen mit dem Punkte $x_1 y_1 z_1$.

$$(7.)\quad \begin{array}{lll} x_1 = \frac{\xi a_1}{a}, & y_1 = \frac{\eta b_1}{b}, & z_1 = \frac{\zeta c_1}{c}, \\ \xi_1 = \frac{x a_1}{a}, & \eta_1 = \frac{y b_1}{b}, & \zeta_1 = \frac{z c_1}{c}. \end{array}$$

Nennen wir nun E die Entfernung der gegebenen Punkte (P.), und D die der correspondirenden Punkte (Q.), so wird:

$$E^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2,$$
$$D^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2;$$

und hieraus ergiebt sich mittelst der Formeln (7.):

$$E^2 = \left(\frac{a_1}{a}\xi - x\right)^2 + \left(\frac{b_1}{b}\eta - y\right)^2 + \left(\frac{c_1}{c}\zeta - z\right)^2,$$
$$D^2 = \left(\frac{a_1}{a}x - \xi\right)^2 + \left(\frac{b_1}{b}y - \eta\right)^2 + \left(\frac{c_1}{c}z - \zeta\right)^2;$$

folglich:

$$D^2 - E^2 = \left[(a_1^2 - a^2)\frac{x^2}{a^2} + (b_1^2 - b^2)\frac{y^2}{b^2} + (c_1^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2}\right]$$
$$- \left[(a_1^2 - a^2)\frac{\xi^2}{a^2} + (b_1^2 - b^2)\frac{\eta^2}{b^2} + (c_1^2 - c^2)\frac{\zeta^2}{c^2}\right].$$

Nach (3.) und (4.) ist aber $a_1^2 - a^2 = b_1^2 - b^2 = c_1^2 - c^2$. Somit ergiebt sich:

$$D^2 - E^2 = (a_1^2 - a^2)\left(\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{c}\right)^2\right]\right);$$

oder endlich mit Rücksicht auf (1.):

$$D^2 - E^2 = (a_1^2 - a^2)(1 - 1), \quad \text{d. i.:} = 0.$$

Hiemit ist die behauptete Gleichheit der Entfernungen D und E bewiesen.

§ 28.

Fortsetzung.

Mit Hülfe dieser Vorbetrachtungen leiten wir den *Ivory'schen Satz* selbst ab. Es sei ein Ellipsoid mit den Axen abc gegeben, dessen Wirkung auf den beliebigen äusseren Punkt $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ bestimmt werden soll. Sind nun xyz die variablen Coordinaten eines Massenelementes des Ellipsoids (bezogen wie $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ auf den Mittelpunkt), so ist, die Dichtigkeit $= 1$ gesetzt, die x-Componente der Wirkung*):

$$(1.)\quad X = \iiint \frac{dx\,dy\,dz\,(\alpha_1 - x)}{[(\alpha_1 - x)^2 + (\beta_1 - y)^2 + (\gamma_1 - z)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Führen wir die Integration nach x aus, indem wir längs einer zur

*) Vergl. die Note Seite 70. Nur sind die Coordinaten des Punktes, auf den die Wirkung stattfindet, hier nicht mit xyz, sondern mit $\alpha\beta\gamma$ bezeichnet.

x-Axe parallelen Sehne mn der Ellipsoidfläche*) fortschreiten, so ergiebt sich:

$$(2.)\ X = \iint dy\,dz \left[\frac{1}{\sqrt{(\alpha_1 - x)^2 + (\beta_1 - y)^2 + (\gamma_1 - z)^2}}\right]_m^n = \iint dy\,dz \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right),$$

wo M und N die Entfernungen des Punktes $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ resp. von m und n vorstellen.

Wir construiren jetzt durch $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ein dem gegebenen confocales Ellipsoid, und bestimmen dessen Wirkung auf den auf der Oberfläche des *gegebenen* liegenden, dem Punkte $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ correspondirenden Punkt $\alpha\beta\gamma$. Sind $x_1 y_1 z_1$ die variablen Coordinaten eines Massenelementes des neuen Ellipsoids, und setzen wir auch für dieses die Dichtigkeit $= 1$, so ist die x-Componente seiner Wirkung auf $\alpha\beta\gamma$:

$$X_1 = \iiint \frac{dx_1\,dy_1\,dz_1\,(\alpha - x_1)}{[(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 + (\gamma - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

und wenn wir wieder nach x integriren:

$$(3.)\ X_1 = \iint dy\,dz \left[\frac{1}{\sqrt{(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 + (\gamma - z_1)^2}}\right]_{m_1}^{n_1} = \iint dy_1\,dz_1 \left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{M_1}\right),$$

wo M_1 und N_1 die Entfernungen des Punktes $\alpha\beta\gamma$ resp. von m_1 und n_1 vorstellen. Dabei repräsentirt $m_1 n_1$ (ähnlich wie früher mn) eine mit der x-Axe parallele Sehne des *neuen* Ellipsoids.

Die noch übrige Integration nach y und z ist auszudehnen in Gleichung (2.) über alle m und n der gegebenen, in Gleichung (3.) über alle m_1 und n_1 der confocalen Oberfläche. Für jedes m giebt es ein correspondirendes m_1, dessen zugehöriges n_1 mit n correspondirt, da m und n, ebenso m_1 und n_1 dieselben y- und z-Coordinaten besitzen. Denkt man sich aber jene Sehnen mn und $m_1 n_1$ der Art einander zugeordnet, dass m und m_1, ebenso n und n_1 correspondirende Punkte sind, und beachtet man, dass $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ebenfalls correspondirende Punkte vorstellen:

$$\begin{cases} m \\ m_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} n \\ n_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha\beta\gamma \\ \alpha_1\beta_1\gamma_1, \end{cases}$$

so wird, zufolge des vorhin (Seite 76) bewiesenen Satzes: $M = M_1$, und $N = N_1$; so dass man also die Formeln (2.), (3.) auch so schreiben kann:

$$(2'.)\qquad X = \iint dy\,dz \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right),$$

$$(3'.)\qquad X_1 = \iint dy_1\,dz_1 \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right).$$

---

*) Diese Sehne mn soll so gedacht werden, dass die Richtung von m nach n identisch ist mit der Richtung der positiven x-Axe.

Denken wir uns ferner die (der x-Axe parallelen) Sehnen mn und $m_1 n_1$ als zwei unendlich dünne Prismata, deren senkrechte Querschnitte $dy\,dz$ und $dy_1\,dz_1$ einander correspondiren, so ist nach Seite 76 (6.):

$$\frac{dy\,dz}{bc} = \frac{dy_1\,dz_1}{b_1 c_1}.$$

Somit folgt aus den Formeln (2′.), (3′.):

$$(4.) \qquad \frac{X}{bc} = \frac{X_1}{b_1 c_1}.$$

Analoge Relationen gelten offenbar für die y- und z-Componenten; so dass wir also schreiben können:

$$(5.) \qquad \frac{X}{bc} = \frac{X_1}{b_1 c_1}, \qquad \frac{Y}{ca} = \frac{Y_1}{c_1 a_1}, \qquad \frac{Z}{ab} = \frac{Z_1}{a_1 b_1}.$$

Dies ist der *Ivory'sche Satz. Er giebt die Relationen zwischen den Componenten derjenigen Wirkungen, die confocalen Ellipsoide wechselseitig auf correspondirende Punkte ihrer Oberflächen ausüben.*

Aus diesem lässt sich der *Mac-Laurin'sche Satz* ableiten, welcher die Relation ausdrückt zwischen den Componenten der Wirkung zweier confocalen Ellipsoide auf einen und denselben an der Oberfläche des einen gelegenen Punkt, der also die Wirkung eines beliebigen Ellipsoids auf einen äusseren Punkt zurückführt auf die Wirkung eines dem gegebenen confocalen Ellipsoids auf einen Punkt seiner Oberfläche.

Anf Seite 73 wurde bewiesen, dass die Componenten der Wirkung eines homogenen Ellipsoids auf einen Punkt *im Innern* oder *an der Oberfläche* proportional sind den Coordinaten dieses Punktes. Denken wir uns nun zwei einander confocale Ellipsoide, ein *grösseres* mit den Axen $a_1 b_1 c_1$ und ein *kleineres* mit den Axen abc, und zwei einander correspondirende resp. auf der grösseren und auf der kleineren Ellipsoidfläche gelegene Punkte $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $\alpha\beta\gamma$; und bezeichnen wir endlich die Wirkung des grössern Ellipsoides $a_1 b_1 c_1$ auf den an seiner Oberfläche liegenden Punkt $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ mit $X_2 Y_2 Z_2$, und (ebenso wie bisher) die Wirkung ebendesselben Ellipsoids auf den in seinem Innern liegenden Punkt $\alpha\beta\gamma$ mit $X_1 Y_1 Z_1$; so wird zufolge des erwähnten Satzes (Seite 73):

$$(6.) \qquad \frac{X_1}{X_2} = \frac{\alpha}{\alpha_1}, \qquad \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{\beta}{\beta_1}, \qquad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\gamma}{\gamma_1},$$

Und durch Multiplikation dieser Formeln mit den Formeln (5.) erhält man:

$$(6'.) \qquad \frac{X}{X_2} = \frac{bc\alpha}{b_1 c_1 \alpha_1}, \qquad \frac{Y}{Y_2} = \frac{ca\beta}{c_1 a_1 \beta_1}, \qquad \frac{Z}{Z_2} = \frac{ab\gamma}{a_1 b_1 \gamma_1},$$

wo XYZ (nach wie vor) die Wirkung des Ellipsoids abc auf den Punkt $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ vorstellen. Diese Formeln (6'.) aber kann man, weil $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ correspondirende Punkte sind, mithin

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{a}{a_1}, \quad \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{b}{b_1}, \quad \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{c}{c_1}$$

ist, auch so schreiben:

$$(6''.) \qquad \frac{X}{X_2} = \frac{abc}{a_1b_1c_1}, \quad \frac{Y}{Y_2} = \frac{abc}{a_1b_1c_1}, \quad \frac{Z}{Z_2} = \frac{abc}{a_1b_1c_1}.$$

Diese Formeln (6''.) enthalten folgenden Satz: *Repräsentiren XYZ die Wirkung eines homogenen Ellipsoides abc auf einen beliebig gegebenen äussern Punkt, und denkt man sich ein auxiliäres Ellipsoid $a_1b_1c_1$ construirt, dessen Oberfläche durch den gegebenen Punkt geht und zur Oberfläche des gegebenen Ellipsoids confocal ist, so wird*

$$(7.) \qquad X = \frac{abc}{a_1b_1c_1}X_2, \quad Y = \frac{abc}{a_1b_1c_1}Y_2, \quad Z = \frac{abc}{a_1b_1c_1}Z_2$$

sein, falls man nämlich unter $X_2Y_2Z_2$ diejenige Wirkung versteht, welche dieses auxiliäre Ellipsoid auf den gegebenen Punkt ausübt. Dies ist der Mac-Laurin'sche Satz.

Nach der Construktion des auxiliären Ellipsoids $a_1b_1c_1$ befindet sich aber der gegebene Punkt *an der Oberfläche* desselben. Bezeichnet man also die Coordinaten dieses Punktes mit xyz, so ist:

$$X_2 = \mathfrak{M}_1 x, \quad Y_2 = \mathfrak{N}_1 y, \quad Z_2 = \mathfrak{P}_1 z,$$

wo $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{P}_1$ gewisse dem Ellipsoid $a_1b_1c_1$ eigenthümliche *Constanten* vorstellen, deren Werthe aus den Formeln (10.), (11.), (12.) (S. 73) sich sofort ergeben, sobald man daselbst statt abc die $a_1b_1c_1$ substituirt. Somit folgt also aus (7.)

$$(7'.) \qquad X = \frac{abc}{a_1b_1c_1}\mathfrak{M}_1 x, \quad Y = \frac{abc}{a_1b_1c_1}\mathfrak{N}_1 y, \quad Z = \frac{abc}{a_1b_1c_1}\mathfrak{P}_1 z.$$

Diese Componenten XYZ der vom Ellipsoid abc auf den *äussern* Punkt xyz ausgeübten Wirkung sind aber genau dieselben Grössen, welche früher mit $\mathfrak{R}\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ bezeichnet wurden. Demgemäss können wir die Formeln (7'.) auch so schreiben:

$$(8.) \qquad \mathfrak{R} = \frac{abc}{a_1b_1c_1}\mathfrak{M}_1 x, \quad \mathfrak{S} = \frac{abc}{a_1b_1c_1}\mathfrak{N}_1 y, \quad \mathfrak{T} = \frac{abc}{a_1b_1c_1}\mathfrak{P}_1 z.$$

Hiemit haben wir unsere Aufgabe vollständig gelöst. Wir sind jetzt im Besitze aller Mittel, um in jedem speziellen Falle sowohl den magnetischen Zustand eines durch gegebene constante Kräfte magnetisirten Ellipsoids, als auch die Wirkung desselben auf irgend wie im Raume gelegene Punkte zu bestimmen.

§ 29.
Componenten der Wirkung eines verlängerten Rotationsellipsoids auf äussere Punkte.

Wir führen die erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen des § 26 ein für den speziellen Fall, dass das gegebene Ellipsoid ein *verlängertes Rotationsellipsoid* ist, dass also

$$a = b, \quad \text{und} \quad c > a$$

ist. Durch Einführung der linearen Excentricität ε

$$c^2 - \varepsilon^2 = a^2 = b^2$$

in die Gleichungen (8.) und (9.) § 26 erhalten wir alsdann, weil

(1.) $$\lambda^2 = \frac{c^2 - a^2}{c^2} = \frac{\varepsilon^2}{c^2} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{c}$$

ist, folgende Formeln:

(2.) $$\mathfrak{M} = 2\pi \frac{c^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{c^2}{c^2 - \varepsilon^2} - \frac{c}{2\varepsilon} \log \frac{c + \varepsilon}{c - \varepsilon} \right\},$$

(3.) $$\mathfrak{P} = 4\pi \frac{c^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{c}{2\varepsilon} \left[\log \frac{c + \varepsilon}{c - \varepsilon} \right] - 1 \right\},$$

$$X = \mathfrak{M}x, \quad Y = \mathfrak{M}y, \quad Z = \mathfrak{P}z.$$

Dies sind die allgemeinen Ausdrücke für die Componenten der Wirkung eines homogenen verlängerten Rotationsellipsoids auf einen Punkt *im Innern* resp. an *seiner Oberfläche.* Wir erhalten hieraus die Componenten der Wirkung desselben Ellipsoids auf einen *äusseren* Punkt xyz nach den Gleichungen (8.) § 28

$$\mathfrak{R} = \frac{a^2 c}{a_1^2 c_1} \mathfrak{M}_1 x = \frac{a^2 c}{a_1^2 c_1} 2\pi \frac{c_1^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{c_1^2}{c_1^2 - \varepsilon^2} - \frac{c_1}{2\varepsilon} \log \frac{c_1 + \varepsilon}{c_1 - \varepsilon} \right) x,$$

$$\mathfrak{S} = \frac{a^2 c}{a_1^2 c_1} \mathfrak{M}_1 y = \frac{a^2 c}{a_1^2 c_1} 2\pi \frac{c_1^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{c_1^2}{c_1^2 - \varepsilon^2} - \frac{c_1}{2\varepsilon} \log \frac{c_1 + \varepsilon}{c_1 - \varepsilon} \right) y,$$

$$\mathfrak{T} = \frac{a^2 c}{a_1^2 c_1} \mathfrak{P}_1 z = \frac{a^2 c}{a_1^2 c_1} 4\pi \frac{c_1^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{c_1}{2\varepsilon} \left[\log \frac{c_1 + \varepsilon}{c_1 - \varepsilon} \right] - 1 \right) z.$$

Nun ist aber:

$$\frac{a^2}{a_1^2} = \frac{c^2 - \varepsilon^2}{c_1^2 - \varepsilon^2}.$$

Somit ergiebt sich:

(4.)
$$\mathfrak{R} = 2\pi \frac{c^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} c \left(\frac{c_1}{c_1^2 - \varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{c_1 + \varepsilon}{c_1 - \varepsilon} \right) x,$$

$$\mathfrak{S} = 2\pi \frac{c^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} c \left(\frac{c_1}{c_1^2 - \varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{c_1 + \varepsilon}{c_1 - \varepsilon} \right) y,$$

$$\mathfrak{T} = 4\pi \frac{c^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} c \left(\frac{1}{2\varepsilon} \left[\log \frac{c_1 + \varepsilon}{c_1 - \varepsilon} \right] - \frac{1}{c_1} \right) z.$$

Zur Bestimmung von c_1 benutzen wir die Gleichung des durch xyz gelegten, dem gegebenen confocalen Ellipsoids

$$\left(\frac{\xi}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{c_1}\right)^2 = 1.$$

Hieraus folgt, wenn wir für $\xi\eta\zeta$ den gegebenen Punkt xyz substituiren, und zugleich für a_1^2 den (zu Anfang dieses Paragraphen angegebenen) Werth $(c_1^2 - \varepsilon^2)$ einsetzen:

$$(5.)\qquad \frac{x^2 + y^2}{c_1^2 - \varepsilon^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1.$$

Die gesuchte Grösse c_1^2 ist eine der Wurzeln dieser für c_1^2 quadratischen Gleichung; und man erhält also:

$$(6.)\qquad c_1^2 = \tfrac{1}{2}(r^2 + \varepsilon^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(r^2 + \varepsilon^2)^2 - 4 z^2 \varepsilon^2},$$

wo:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Für die *andere* Wurzel c_1^2 wird $\sqrt{c_1^2 - \varepsilon^2} = a$ imaginär; sie gehört einem durch xyz gelegten Hyperboloid an.

Von besonderem Interesse sind noch die Grenzfälle, wo sich das gestreckte Rotationsellipsoid in eine ellipsoidische Linie, und das abgeplattete in eine Kreisscheibe verwandelt, also $\frac{a}{c}$ resp. $\frac{c}{a}$ verschwindet, mithin $\varepsilon^2 = c^2$ resp. $= - a^2$ wird.

§ 30.

Magnetischer Zustand einer ruhenden homogenen Eisenkugel unter dem Einflusse mit dem Orte variabeler äusserer Kräfte.

Ist V (das Potential der magnetisirenden äusseren Massen) eine *beliebige* Funktion der Coordinaten, nur behaftet mit den allgemeinen Eigenschaften eines Potentials, das herrührt von ausserhalb des magnetisirten Körpers liegenden Massen, so können wir, falls dieser eine Kugel ist, seinen magnetischen Zustand vollständig angeben. Wir können nämlich dieses V, da es nicht unendlich wird, immer nach Kugelfunktionen entwickeln:

$$(1.)\qquad V = F(r, \mu, \omega) = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + \cdots + V^{(n)} + \cdots$$

In diesem Falle ist auch φ Funktion der Coordinaten r, μ, ω, und gleichfalls nach Kugelfunktionen entwickelbar:

$$(2.)\qquad \varphi = \varphi(r, \mu, \omega) = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \cdots + \varphi^{(n)} + \cdots$$

Daraus folgt

$$(3.)\qquad \overline{\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}} = \overline{\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial r}} + \overline{\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial r}} + \cdots + \overline{\frac{\partial \varphi_1^{(n)}}{\partial r}} + \cdots,$$

wo nach der Differentiation für r, μ, ω die Coordinaten der Oberfläche R, μ_1, ω_1 zu setzen sind. Bezeichnet endlich ϱ die Entfernung des

Punktes, für welchen wir das Potential Q suchen, von den Punkten der Oberfläche des magnetisirten Körpers, so kann $\frac{1}{\varrho}$ ebenfalls nach Kugelfunktionen entwickelt werden; wir erhalten nämlich:

$$\text{(4.)} \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\left[\mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\omega-\omega_1)\right]}},$$

und hieraus für innere Punkte, d. h. für $R > r$:

$$\text{(4a.)} \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{Q^{(0)}}{R} + \frac{rQ^{(1)}}{R^2} + \frac{r^2Q^{(2)}}{R^3} + \cdots + \frac{r^nQ^{(n)}}{R^{n+1}} + \cdots;$$

und andererseits für äussere Punkte, d. h. für $R < r$:

$$\text{(4b.)} \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{Q^{(0)}}{r} + \frac{RQ^{(1)}}{r^2} + \frac{R^2Q^{(2)}}{r^3} + \cdots + \frac{R^nQ^{(n)}}{r^{n+1}} + \cdots *)$$

Damit haben wir alle Daten, welche zur Berechnung des Potentials

$$Q = \varkappa \int \frac{do}{\varrho}\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i$$

[Gleichungen (2.) und (4.) § 13] erforderlich sind.

Für die Kugel ist: $R = \text{const.}$, und: $do = R^2 d\mu_1 d\omega_1$, mithin:

$$Q_i = \varkappa R^2 \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\mu_1\, d\omega_1 \left(\frac{Q^{(0)}}{R} + \frac{rQ^{(1)}}{R^2} + \cdots\right)\left(\overline{\frac{\partial\varphi_1{}^{(0)}}{\partial r}} + \overline{\frac{\partial\varphi_1{}^{(1)}}{\partial r}} + \cdots\right).$$

Hieraus aber ergiebt sich mittelst der allgemeinen Eigenschaften der Kugelfunktionen sofort:

$$\text{(5.)} \qquad Q_i = 4\pi\varkappa R^2\left(\frac{1}{R}\overline{\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial r}} + \frac{1}{3}\frac{r}{R^2}\overline{\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r}} + \frac{1}{5}\frac{r^2}{R^3}\overline{\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r}} + \cdots\right).$$

Wir können jetzt die Ausdrücke (1.), (2.), (5.) in die Fundamentalgleichung (1.) § 13:

$$\text{(A.)} \qquad V + \varphi + Q = 0$$

---

*) Man sieht, dass in diesen Formeln (4a.), (4b.) das $Q^{(n)}$ zur Abkürzung gesetzt ist für $P^{(n)}(\cos\gamma)$, wo $\cos\gamma$ den in (4.) als Faktor von $-2rR$ auftretenden Ausdruck vorstellt. Es ist also:

$$\text{(I.)} \qquad Q^{(n)} = P^{(n)}(\cos\gamma),$$

$$\text{(II.)} \qquad \text{und:}\ \cos\gamma = \mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\omega-\omega_1),$$

$$\text{(III.)} \qquad \text{d. h.:}\ \cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\omega-\omega_1).$$

Man kann (wie mit Bezug auf spätere Betrachtungen zu bemerken zweckmässig ist) den Ausdruck $Q^{(n)} = P^{(n)}(\cos\gamma)$ entwickeln nach den Cosinus der Vielfachen von $(\omega - \omega_1)$. Alsdann erhält man bekanntlich:

$$\text{(IV.)} \qquad Q^{(n)} = P^{(n)}(\cos\gamma) = P^{(n)}(\mu)P^{(n)}(\mu_1) + U^{(n)}\cos(\omega-\omega_1) + V^{(n)}\cos 2(\omega-\omega_1) + W^{(n)}\cos 3(\omega-\omega_1) + \cdots,$$

wo die $U^{(n)}$, $V^{(n)}$, $W^{(n)}$, $\cdots$ nur noch von μ, μ_1 abhängen.

substituiren. Da diese für jeden Punkt im Innern, also für jedes $r \leqq R$ gilt, so ist offenbar

$$\text{(B.)} \qquad \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial Q}{\partial r} \quad \text{ebenfalls} \quad = 0,$$

so lange $r \leqq R$ bleibt. Im Ausdrucke für Q (5.) ist r *nur* explicite enthalten, da in den $\varphi^{(n)}$ dort $r = R$ gesetzt ist; somit ergiebt sich:

$$\text{(6.)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{\partial V^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial V^{(2)}}{\partial r} + \cdots + \frac{\partial V^{(n)}}{\partial r} + \cdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} + \cdots + \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial r} + \cdots \\ \frac{\partial Q}{\partial r} &= 4\pi\varkappa\left(\frac{1}{3}\overline{\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r}} + \frac{2}{5}\frac{r}{R}\overline{\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r}} + \cdots + \frac{n}{2n+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}\overline{\frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial r}} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Die Summe dieser drei Ausdrücke aber muss nach (B.) für jedes $r \leqq R$ verschwinden. Somit ergiebt sich z. B. für $r = R$ folgende Formel:

$$\text{(7.)} \quad 0 = \left[\overline{\frac{\partial V^{(0)}}{\partial r}} + \overline{\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r}}\right] + \left[\overline{\frac{\partial V^{(1)}}{\partial r}} + (1 + \tfrac{1}{3}\, 4\pi\varkappa)\overline{\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r}}\right] +$$
$$+ \left[\overline{\frac{\partial V^{(2)}}{\partial r}} + \left(1 + \tfrac{2}{5}\, 4\pi\varkappa\right)\overline{\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r}}\right] + \cdots \left[\overline{\frac{\partial V^{(n)}}{\partial r}} + \left(1 + \frac{n}{2n+1} 4\pi\varkappa\right)\overline{\frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial r}}\right] + \cdots\cdots$$

Damit aber diese nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe $= 0$ sei; müssen die Terme je einer Ordnung für sich verschwinden. Somit folgt:

$$\text{(8.)} \quad \begin{cases} \overline{\dfrac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r}} = -\overline{\dfrac{\partial V^{(0)}}{\partial r}}, {}^{*)} \\ \overline{\dfrac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r}} = -\dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}\, 4\pi\varkappa}\overline{\dfrac{\partial V^{(1)}}{\partial r}}, \\ \overline{\dfrac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r}} = -\dfrac{1}{1 + \frac{2}{5}\, 4\pi\varkappa}\overline{\dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial r}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\dfrac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial r}} = -\dfrac{1}{1 + \dfrac{n}{2n+1}\, 4\pi\varkappa}\overline{\dfrac{\partial V^{(n)}}{\partial r}}. \end{cases}$$

Substituirt man aber diese Werthe in (5.), so folgt:

$$\text{(9.)} \quad Q_i = -4\pi\varkappa R\left\{\overline{\frac{\partial V^{(0)}}{\partial r}} + \frac{\frac{1}{3}\frac{r}{R}\overline{\frac{\partial V^{(1)}}{\partial r}}}{1 + \frac{1}{3}\, 4\pi\varkappa} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{r}{R}\right)^2\overline{\frac{\partial V^{(2)}}{\partial r}}}{1 + \frac{2}{5}\, 4\pi\varkappa} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{\frac{1}{2n+1}\left(\frac{r}{R}\right)^n\overline{\frac{\partial V^{(n)}}{\partial r}}}{1 + \frac{n}{2n+1}\, 4\pi\varkappa}\right\}.$$

---

*) Da bekanntlich die Funktionen $V^{(0)}$ und $\varphi^{(0)}$, zufolge ihrer durch (1.), (2.) gegebenen Definition, von r unabhängig sind, so sind in der *ersten* Formel (8.) beide Seiten $= 0$.

Damit haben wir das Potential der Kugel auf einen Punkt im Innern ausgedrückt durch die gegebene Funktion V der Coordinaten r, μ, ω, dasselbe also vollständig bestimmt.

Aus der Fundamentalgleichung (A.) erhalten wir:

$$-\varphi = +V + Q,$$

also durch Substitution der Werthe (1.) und (9.):

$$(10.)\ -\varphi = \left[V^{(0)} - 4\pi\varkappa R \frac{\partial V^{(0)}}{\partial r}\right] + \left[V^{(1)} - \frac{4\pi\varkappa R}{1+\frac{1}{3}4\pi\varkappa} \cdot \frac{1}{3} \frac{r}{R} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial r}\right] + \cdots\cdots$$

Und hieraus lassen sich nach den Gleichungen (3.) des § 13 die *magnetischen Momente* für jede Stelle der Kugel unmittelbar ableiten.

§ 31.

Wirkung der Kugel auf äussere Punkte.

Um die Wirkung der magnetisirten Kugel auf einen beliebigen *äusseren* Punkt zu bestimmen, dient die Formel:

$$Q_a = \varkappa \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_i.$$

Da hier $R < r$, so wird das $\frac{1}{\varrho}$ nach fallenden Potenzen von r, d. h. nach steigenden von $\frac{R}{r}$ zu entwickeln sein. So ergiebt sich mit Benutzung der Formel (4b.):

$$Q_a = \varkappa \int \left(\frac{d\varphi_1}{dr}\right)_i do \left(\frac{Q^{(0)}}{r} + \frac{R Q^{(1)}}{r^2} + \frac{R^2 Q^{(2)}}{r^3} + \cdots\right).$$

Nach den Gleichungen (3.) und (8.) ist aber:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -\left\{\frac{\partial V_1^{(0)}}{\partial r} + \frac{\frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial r}}{1+\frac{1}{3}4\pi\varkappa} + \frac{\frac{\partial V_1^{(2)}}{\partial r}}{1+\frac{2}{5}4\pi\varkappa} \cdots + \frac{\frac{\partial V_1^{(n)}}{\partial r}}{1+\frac{n}{2n+1}4\pi\varkappa} + \cdots\cdots\right\},$$

wo die V Funktionen von μ_1 und ω_1 sind. Somit folgt:

$$Q_a = -\varkappa R^2 \times$$

$$\times \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \left(\frac{Q^{(0)}}{r} + \frac{R Q^{(1)}}{r^2} + \cdots\right)\left\{\frac{\partial V_1^{(0)}}{\partial r} + \frac{\frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial r}}{1+\frac{1}{3}4\pi\varkappa} + \frac{\frac{\partial V_1^{(2)}}{\partial r}}{1+\frac{2}{5}4\pi\varkappa} + \cdots\right\} d\mu_1 d\omega_1.$$

Und hieraus ergiebt sich nach den bekannten allgemeinen Eigenschaften der Kugelfunktionen sofort:

$$(1.)\quad Q_a = -4\pi\varkappa R^2 \left\{ \frac{1}{r}\overline{\frac{\partial V^{(0)}}{\partial r}} + \frac{1}{3}\frac{R}{r^2}\frac{\overline{\frac{\partial V^{(1)}}{\partial r}}}{1+\frac{1}{3}4\pi\varkappa} + \frac{1}{5}\frac{R^2}{r^3}\frac{\overline{\frac{\partial V^{(2)}}{\partial r}}}{1+\frac{2}{5}4\pi\varkappa} + \cdots \right\}.$$

Das erste Glied verschwindet immer, da $V^{(0)}$ von r unabhängig ist.*)

Wir wenden das erhaltene Resultat auf den einfachen Fall an, dass V in der Entwickelung sich vollständig darstellen lässt durch das *eine* Glied $V^{(1)}$. In diesem Falle ist offenbar:

$$(2.)\quad V = V^{(1)} = r\left(A\mu + B\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega + C\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega\right),$$

wo A, B, C *Constante* sind. Hieraus folgt:

$$\overline{\frac{\partial V^{(1)}}{\partial r}} = A\mu + B\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega + C\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$$

oder was dasselbe ist:

$$\overline{\frac{\partial V^{(1)}}{\partial r}} = \left\{Ax + By + Cz\right\}\frac{1}{r}.$$

Somit ergiebt sich aus (1.):

$$(3.)\quad Q_a = -\frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}\frac{R^3}{r^3}\left(Ax + By + Cz\right);$$

was mit Gleichung (15.) § 18 übereinstimmt.

Angenähert gilt dieser Ausdruck auch in allen den Fällen, wo zwar V nicht durch ein Glied allein darzustellen, aber r sehr gross gegen R ist. Selbst wenn etwa $\frac{R}{r} = \frac{1}{5}$ ist, kann Q_a sehr angenähert durch die beiden ersten, oder sogar durch das erste allein dargestellt werden.

§ 32.

Wirkung einer durch einen Stahlmagneten magnetisirten Kugel.

Wir wenden die gewonnenen Resultate auf das Experiment an. Die Kugel werde magnetisirt durch einen cylindrischen Stahlmagneten; wir suchen die Wirkung, die sie auf eine horizontal bewegliche Magnetnadel ausübt. Die Axe des Stahlmagneten sei horizontal und senkrecht gegen den Meridian auf die Drehungsaxe der Nadel gerichtet.

Zwischen Nadel und Stab befinde sich die Kugel aus weichem Eisen, so dass ihr Mittelpunkt wie der der Nadel in der verlängerten Axe des cylindrischen Stahlmagneten liegt.

Wir setzen den Stahlmagneten als gleichförmig magnetisirt voraus. (Kleine Abweichungen könnten durch Drehung um seine Axe ermittelt werden.) Nehmen wir nun diese Axe zur Axe unserer Polarcoordi-

*) Vergl. die Note Seite 84.

naten*), deren Anfangspunkt der Mittelpunkt der Kugel ist, so kann V, der vollkommenen Symmetrie wegen, nicht Funktion von ω, sondern nur von r und μ sein. Dadurch verwandeln sich bekanntlich in der

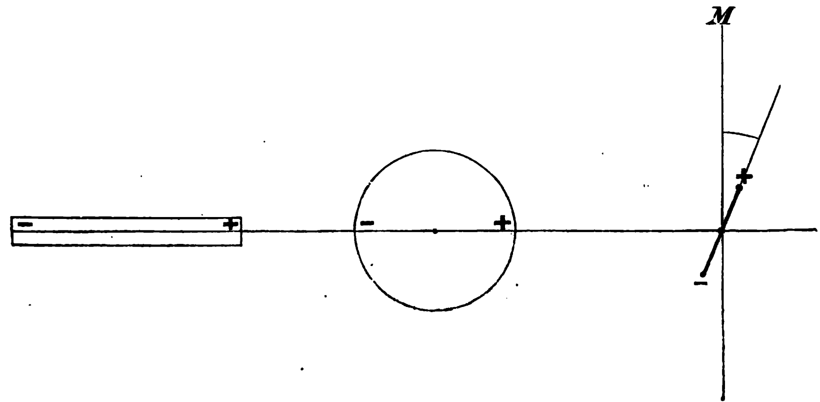


Fig. 12.

Entwickelung von V die allgemeinen Kugelfunktionen $Y^{(n)}$ in die spezielleren Funktionen von der Form $P^{(n)}(\mu)$. Setzt man also zur Abkürzung $P^{(n)}$ für $P^{(n)}(\mu)$, so ergiebt sich:

$$(1.)\qquad V = A_0 P^{(0)} + A_1 r P^{(1)} + A_2 r^2 P^{(2)} + \cdots + A_n r^n P^{(n)} + \cdots,$$

wo die A *constante* Coefficienten sind. Für alle in der positiven Axe gelegenen Punkte ist $\mu = 1$, mithin $P^{(n)} = P^{(n)}(1) = 1$. Somit ergiebt sich:

$$(2.)\qquad (V)_{\mu=1} = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \cdots + A_n r^n + \cdots$$

Die Componente der Wirkung in der Richtung der positiven Axe hat daher den Werth:

$$(3.)\qquad -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\mu=1} = -\left(A_1 + 2A_2 r + \cdots + nA_n r^{n-1} + \cdots\right).$$

Und insbesondere wird der Werth dieser Componente für den Mittelpunkt der Kugel, d. i. für $r = 0$ folgender sein:

$$(4.)\qquad -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\mu=1,\, r=0} = -A_1.$$

Die Constante A_1 giebt also, negativ genommen, die Grösse der Kraft an, welche der Stahlmagnet im Mittelpunkte der Kugel in der Richtung der positiven Axe ausübt. Diese Wirkung lässt sich experimentell ermitteln durch die Beobachtung der Ablenkung, welche eine an diesem Orte statt der Kugel aufgestellte Magnetnadel erfährt. Und in solcher Weise lässt sich also diese Wirkung des Magneten ausdrücken durch die Intensität des Erdmagnetismus.

*) Und zwar mag die *positive* Richtung dieser Axe in obiger Figur vom Kugelmittelpunkte nach *Rechts* laufen.

Ebenso kann man die Wirkung des Stahlmagneten auch an *anderen* Stellen der Axe (diesseits und jenseits des Kugelmittelpunktes) beobachten, und mittelst dieser Beobachtungen die auf einander folgenden Constanten $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ *numerisch bestimmen.* Um näher hierauf einzugehen, müssen wir zunächst die Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) weiter vervollständigen.

Für die negative Seite der Axe ist $\mu = -1$, mithin $P^{(n)} = P^{(n)}(-1) = (-1)^n$. Somit folgt also für $\mu = 1$ aus der Formel (1.):

$$(5.) \qquad (V)_{\mu=-1} = A_0 - A_1 r + A_2 r^2 - \cdots + (-1)^n A_n r^n \cdots$$

Demgemäss stellt der Ausdruck

$$(6.) \quad + \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\mu=-1} = -\left(A_1 - 2A_2 r + 3A_3 r^2 + \cdots - (-1)^n n A_n r^{n-1} + \cdots\right)$$

diejenige Wirkung dar, welche in den Punkten $\mu = -1$ stattfindet in der Richtung der *positiven* Axe.

Durch Einsetzen der beobachteten Werthe in die Formeln (3.) und (6.) erhält man beliebig viele Gleichungen zur Bestimmung einer hinreichenden Anzahl der in V vorkommenden Constanten A_1, A_2, $A_3, \cdots$ Auf diese Weise können wir, für das ganze in die später aufzustellende Kugel fallende Stück der Axe, V durch eine nach Potenzen von r fortschreitende Reihe darstellen, welche sehr bald abbricht, wenn nicht die Kugel sehr gross oder dem Magneten sehr nahe aufgestellt ist.

Durch Multiplication der einzelnen A mit $rP^{(1)}$, $r^2P^{(2)}$, $\cdots r^nP^{(n)}$ erhalten wir alsdann nach Gleichung (1.) den vollständigen Ausdruck für V *für das ganze Innere der Kugel,* bis auf das von r und μ unabhängige und deshalb unwesentliche erste Glied $A_0P^{(0)}$. Setzen wir diesen Werth für V in die Gleichung (1.) § 31, so ist damit auch Q_a vollständig bestimmt.

Ermitteln wir endlich noch experimentell die Wirkung des Stahlmagneten (ohne die Kugel) auf diejenige Nadel, deren Ablenkung durch beide zugleich beobachtet werden soll (Fig. auf Seite 87), so haben wir alle nothwendigen Data, um jene Wirkung, welche Stahlmagnet und Kugel zusammen auf die Nadel ausüben werden, *a priori* zu bestimmen, — bis auf die Constante $\varkappa$. Vergleicht man also diese *a priori* berechnete Wirkung mit der wirklich beobachteten, *so erhält man den numerischen Werth der Constanten* $\varkappa$. — Die Beobachtungen sind nie in dieser Weise angestellt. Es würde sich durch dieselben sehr leicht z. B. die Abhängigkeit der Grösse $\varkappa$ von der Temperatur und von anderen Umständen bestimmen lassen.

Man übersieht von vorne herein, dass durch das Einschalten der Kugel zwischen Stahlmagnet und Nadel die Ablenkung der letzteren vergrössert wird, da die Kugel in demselben Sinne wie der Stab magnetisirt wird.*)

§ 33.

Potential eines magnetisirenden elektrischen Kreisstromes.

Noch einfacher und leichter durchzuführen ist folgende Anwendung. Es soll der magnetische Zustand der Kugel und ihre Wirkung nach aussen bestimmt werden für den Fall, dass die magnetisirende Kraft nicht von einem Stahlmagneten, sondern von einem *elektrisirten Strome*, und zwar von einem *Kreisstrome* ausgeübt wird.

Der Kreisstrom sei so aufgestellt, dass ein vom Mittelpunkte der Kugel auf seine Ebene gefälltes Loth seinen Mittelpunkt trifft.

Die Wirkung des Stromes auf die Kugel kann nach dem berühmten *Ampère*'schen Satze ersetzt werden durch die einer auf der einen Seite mit positiver auf der anderen Seite mit negativer magnetischer Flüssigkeit gleichförmig belegten Fläche, welche von der geschlossenen Curve der Strombahn begrenzt, im Uebrigen aber beliebig gestaltet ist.

Die positive Belegung ist nach der *Ampère*'schen Regel auf *der* Seite der Fläche anzubringen, welche einer im Strome (in der Richtung desselben) schwimmend gedachten menschlichen Figur zur Linken ist, falls diese hinsieht nach dem Mittelpunkte der Fläche.

Ist j die Stromstärke und Δ der gegenseitige Abstand der beiden Belegungen, so ist die in einem Flächenelement do aufgelagert zu denkende Quantität magnetischer Flüssigkeit gleich

$$\frac{j\,do}{\Delta\sqrt{2}} = m. \tag{1.}$$

Wir disponiren nun über die willkürliche Gestalt der Fläche in der Weise, dass wir uns um den Mittelpunkt der gegebenen Kugel eine zweite Kugelfläche beschrieben denken, welche durch die Peripherie des Kreisstromes geht. Die von diesem aus jener zweiten Fläche ausgeschnittene Calotte sei die magnetische Fläche.

Der Radius der zweiten Kugelfläche sei $= R_1$, der der ersten, d. i. der Eisenkugel $= R$. Wir bezeichnen das Potential des Stromes oder der magnetischen Calotte mit V_i für alle Punkte $r\mu\omega$, deren $r < R_1$, und mit V_a für die, deren $r > R_1$ ist. Dabei diene der Mittelpunkt A der Kugel als Anfangspunkt der Coordinaten; ferner

*) In der Figur Seite 87 ist solches durch die Zeichen + — angedeutet.

falle die Axe des Coordinatensystems zusammen mit der von A nach dem Mittelpunkte B des Kreisstromes hinlaufenden Linie AB. Und gleichzeitig mag der Werth von ϑ für die Punkte dieses Kreisstromes j mit Θ bezeichnet sein.

Die Richtung des Stromes j sei so gewählt, dass die positive Belegung der von j begrenzten Calotte sich auf der *äussern* Seite derselben befindet. Das Potential dieser positiven Belegung der Calotte auf einem beliebigen Punkte $r\mu\omega$ hat den Werth [vergl. (1.)]:

$$(2.)\qquad \frac{jR_1^2}{\Delta\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{\cos\Theta}^{+1}\frac{d\mu_1\,d\omega_1}{E\,(R_1,\,\mu_1,\,\omega_1,\,r,\,\mu,\,\omega)};$$

dabei bezeichnet $R_1^2 d\mu_1 d\omega_1$ irgend ein Element der Calotte, und $E = E\,(R_1, \mu_1, \omega_1, r, \mu, \omega)$ den Abstand dieses Elementes vom Punkte $r\mu\omega$. Für die *negative* (auf der Innenseite der Calotte befindliche) Belegung wird das Potential durch eine Formel dargestellt sein, welche sich von der Formel (2.) nur dadurch unterscheidet, dass $-m$ an Stelle von m (1.), und $R_1 - \Delta$ an Stelle von R_1 tritt. Es wird also dieses Potential der *negativen* Belegung der Calotte auf den Punkt $r\mu\omega$ den Werth haben:

$$(3.)\qquad -\frac{jR_1^2}{\Delta\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{\cos\Theta}^{+1}\frac{d\mu_1\,d\omega_1}{E\,(R_1-\Delta,\,\mu_1,\,\omega_1,\,r,\,\mu,\,\omega)}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck (3.) nach den Potenzen der unendlich kleinen Grösse Δ, und addirt man sodann den Ausdruck (2.) hinzu, so erhält man für das Potential der *Doppelbelegung* der Calotte den Werth:

$$(4.)\qquad V = \frac{jR_1^2}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_{\cos\Theta}^{+1} d\mu_1\,d\omega_1\,\frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial R_1},$$

wo E der Kürze willen für $E\,(R_1, \mu_1, \omega_1, r, \mu, \omega)$ gesetzt ist. Bei der jetzt folgenden Entwickelung von $\frac{1}{E}$ nach Kugelfunktionen haben wir zu unterscheiden, ob $r < R_1$ oder $r > R_1$. In ersterem Falle wird [vergl. (4a.), (4b.) Seite 83]:

$$V_i = \frac{jR_1^2}{\sqrt{2}}\int_{\cos\Theta}^{+1} d\mu_1\int_0^{2\pi} d\omega_1\,\frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{Q^{(0)}}{R_1}+\frac{rQ^{(1)}}{R_1^2}+\frac{r^2Q^{(2)}}{R_1^3}+\cdots\right),$$

oder was dasselbe ist:

$$(5.)\qquad V_i = -\frac{j}{\sqrt{2}}\int\limits_{\cos\Theta}^{+1} d\mu_1 \int\limits_0^{2\pi} d\omega_1 \left(Q^{(0)} + 2\frac{r\,Q^{(1)}}{R_1} + 3\frac{r^2 Q^{(2)}}{R_1^{\,2}} + \cdots\right).$$

Durch Ausführung der Integration nach ω_1 erhält man hieraus sofort*):

$$(6.)\qquad V_i = \frac{-2\pi j}{\sqrt{2}}\int\limits_{\mathsf{M}}^{1} d\mu_1 \left(P^{(0)}P_1^{(0)} + \frac{2\,r}{R_1}P^{(1)}P_1^{(1)} + \frac{3\,r^2}{R_1^{\,2}}P^{(2)}P_1^{(2)} + \cdots\right),$$

wo $\cos\Theta = \mathsf{M}$ gesetzt ist, und $P^{(n)}$ für $P^{(n)}(\mu)$, ferner $P_1^{(n)}$ für $P^{(n)}(\mu_1)$ steht. Um nun das Integral

$$(7.)\qquad J^{(n)} = \int\limits_{\mathsf{M}}^{1} d\mu_1\, P_1^{(n)} = \int\limits_{\mathsf{M}}^{1} d\mu_1 P^{(n)}(\mu_1) = \int\limits_{\mathsf{M}}^{1} d\mu\, P^{(n)}(\mu)$$

zu berechnen, bemerken wir zunächst, dass $P^{(0)}(\mu) = 1$ ist, und dass also

$$(8.)\qquad J^{(0)} = \int\limits_{\mathsf{M}}^{1} d\mu = 1 - \mathsf{M}$$

ist. Was die *übrigen* Fälle: $n = 1, 2, 3, \cdots$ betrifft, so gilt bekanntlich für $P^{(n)}(\mu)$ die Differentialgleichung:

$$n\,(n+1)\,P^{(n)}(\mu) + \frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\,\frac{d\,P^{(n)}(\mu)}{d\mu}\right) = 0.$$

Und aus dieser folgt durch Multiplication mit $d\mu$ und Integration:

$$n\,(n+1)\int\limits_{\mathsf{M}}^{1} d\mu P^{(n)}(\mu) - (1-\mathsf{M}^2)\,\frac{d\,P^{(n)}(\mathsf{M})}{d\mathsf{M}} = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$(8'.)\qquad J^{(n)} = \frac{1-\mathsf{M}^2}{n\,(n+1)}\,\frac{d\,P^{(n)}}{d\mathsf{M}},$$

wo zur Abkürzung das in $P^{(n)}$ enthaltene Argument M *unterdrückt* ist, — Durch Benutzung dieser Werthe der Integrale J gewinnt die Formel (6.) folgende Gestalt:

$$(9.)\qquad V_i = -\frac{2\pi j}{\sqrt{2}}\left[P^{(0)}(1-\mathsf{M}) + \frac{1}{1}\frac{r}{R_1}\,P^{(1)}\left((1-\mathsf{M}^2)\,\frac{d\,P^{(1)}}{d\mathsf{M}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_1}\right)^2 P^{(2)}\left((1-\mathsf{M}^2)\frac{d\,P^{(2)}}{d\mathsf{M}}\right) + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{r}{R_1}\right)^n P^{(n)}\left((1-\mathsf{M}^2)\frac{d\,P^{(n)}}{d\mathsf{M}}\right) + \cdots\right].$$

Hier sind also die nach M differenzirten P mit dem Argument M, hingegen die *nicht* differenzirten P mit dem Argument μ behaftet zu denken.

*) Vergl. die Note Seite 83, namentlich die dortige Entwickelung (IV.).

In entsprechender Weise wird sich offenbar das V_a behandeln lassen. Man erhält successive:

$$V_a = \frac{jR_1^2}{\sqrt{2}} \int\limits_{\mathsf{M}}^{+1} d\mu_1 \int\limits_0^{2\pi} d\omega_1 \frac{\partial}{\partial R_1} \left(\frac{Q^{(0)}}{r} + \frac{R_1 Q^{(1)}}{r^2} + \frac{R_1^2 Q^{(2)}}{r^3} + \cdots \right),$$

$$= + \frac{jR_1^2}{\sqrt{2}} \int\limits_{\mathsf{M}}^{+1} d\mu_1 \int\limits_0^{2\pi} d\omega_1 \left(\frac{Q^{(1)}}{r^2} + 2\frac{R_1 Q^{(2)}}{r^3} + 3\frac{R_1^2 Q^{(3)}}{r^4} + \cdots \right);$$

$$= \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} R_1^2 \int\limits_{\mathsf{M}}^{+1} d\mu_1 \left(\frac{1}{r^2} P^{(1)} P_1^{(1)} + 2\frac{R_1}{r^3} P^{(2)} P_1^{(2)} + 3\frac{R_1^2}{r^4} P^{(3)} P_1^{(3)} + \cdots \right),$$

also schliesslich:

$$(10.)\quad V_a = \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \Big[\frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{r}\right)^2 P^{(1)} (1-\mathsf{M}^2) \frac{dP^{(1)}}{d\mathsf{M}} + \frac{1}{3} \left(\frac{R_1}{r}\right)^3 P^{(2)} (1-\mathsf{M}^2) \frac{dP^{(2)}}{d\mathsf{M}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{n+1} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1} P^{(n)} (1-\mathsf{M}^2) \frac{dP^{(n)}}{d\mathsf{M}} + \cdots \Big],$$

wo über die Argumente der P Gleiches gilt wie in Formel (9.). *Mittelst dieser Formeln* (9.) *und* (10.) *können wir jetzt die Wirkung des Stromes j auf jeden beliebigen Punkt $r\mu\omega$ des Raumes berechnen.*

Ist statt des *eines* Kreisstromes eine *grössere Anzahl*, A, ganz gleicher, unmittelbar an einander liegender Kreisströme vorhanden, macht also der Draht, statt eines, A Umgänge, für welche alle M denselben oder doch nahezu denselben Werth haben, so ist V gleich dem Afachen der Ausdrücke (9.) und (10.), d. h. gleich der Summe der Potentiale der A einzelnen Ströme; mithin

$$(11.)\quad V_i = -A \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \left[P^{(0)} (1-\mathsf{M}) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{r}{R_1}\right)^n P^{(n)} (1-\mathsf{M}^2) \frac{dP^{(n)}}{d\mathsf{M}} \right\} \right],$$

$$(12.)\quad V_a = A \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{n+1} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1} P^{(n)} (1-\mathsf{M}^2) \frac{dP^{(n)}}{d\mathsf{M}} \right\}.$$

§ 34.

Wirkung des Kreisstromes und der durch ihn magnetisirten Kugel auf die Deklinationsnadel.

Wir wenden die Gleichungen (11.), (12.) an zur Bestimmung der Wirkung, welche der Kreisstrom und die durch ihn magnetisirte Eisenkugel auf äussere Punkte, z. B. auf eine Deklinationsnadel ausüben. Zunächst ergiebt sich aus (11.):

(1.) $$\frac{\partial \overline{V_i^{(n)}}}{\partial r} = -A \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{R^{n-1}}{R_1^{\,n}} P^{(n)} (1 - \mathsf{M}^2) \frac{dP^{(n)}}{d\mathsf{M}} \right\}.$$

Somit folgt aus Gleichung (1.) § 31:

(2.) $$Q_a = 4\pi\varkappa A \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \left[\frac{\frac{1}{3}\frac{R^3}{R_1 r^2}}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa} P^{(1)}(1 - \mathsf{M}^2) \frac{dP^{(1)}}{d\mathsf{M}} + \frac{\frac{1}{5}\frac{R^5}{R_1^{\,2} r^3}}{1 + \frac{8}{5}\pi\varkappa} P^{(2)}(1 - \mathsf{M}^2) \frac{dP^{(2)}}{d\mathsf{M}} + \cdots \right].$$

Ist nun r mindestens 5 *bis* 6*mal so gross als R und R_1*, so erhalten wir eine schon sehr grosse Annäherung, wenn wir in V_a und Q_a nur das erste Glied berücksichtigen. Unter dieser Voraussetzung wird aber:

(3.) $$V_a = \left(A \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 P^{(1)} (1 - \mathsf{M}^2) \frac{dP^{(1)}}{d\mathsf{M}},$$

(4.) $$Q_a = \frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa} \left(A \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \right) \frac{R^3}{R_1 r^2} P^{(1)} (1 - \mathsf{M}^2) \frac{dP^{(1)}}{d\mathsf{M}},$$

oder, weil bekanntlich $P^{(1)}(\mu) = \mu$, und $P^{(1)}(\mathsf{M}) = \mathsf{M}$, mithin $\frac{dP^{(1)}(\mathsf{M})}{d\mathsf{M}} = 1$ ist:

(5.) $$V_a = \left(A \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \mu\, (1 - \mathsf{M}^2),$$

(6.) $$Q_a = \frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa} \left(A \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \right) \frac{R^3}{R_1 r^2} \mu\, (1 - \mathsf{M}^2).$$

Hieraus ergiebt sich:

(7.) $$\frac{Q_a}{V_a} = \frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa} \cdot 2 \left(\frac{R}{R_1} \right)^3,$$

(7'.) d. h.: $$Q_a = \frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa} \cdot 2 \left(\frac{R}{R_1} \right)^3 V_a.$$

Die Potentiale des Stromes und der Kugel stehen also für grosse r in einem constanten von r, μ, M und j unabhängigen Verhältniss. Und Gleiches gilt daher auch von den Componenten der betreffenden Wirkungen.

Aus § 19 wissen wir, dass die Constante

$$\frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa} = k \quad \text{[vergl. (16.) Seite 49]}$$

wenig von 1 verschieden ist. Legen wir die Windungen des Stromdrahtes unmittelbar um die Kugel, so wird auch nahezu

$$\frac{R}{R_1} = 1$$

also angenähert

(8.) $$Q_a = 2\, V_a.$$

Dies ist der Grenzwerth, dem sich das Potential der magnetisirten Kugel unter den angegebenen Verhältnissen nähert. *Unter diesen günstigen Umständen ist also die Wirkung der Kugel* doppelt *so gross als die des Stromes; die beider zusammen also* dreimal *so gross, als die des Stromes.*

Wir bestimmen jetzt die Wirkung von Strom und Kugel auf eine mit den Mittelpunkten beider in einer Horizontalebene aufgestellte Deklinationsnadel. Die Axe der Coordinaten, welche unserer früheren Voraussetzung gemäss, die Mittelpunkte von Kreis und Kugel verbindet und senkrecht steht auf der Ebene des Kreises, sei jetzt horizontal und senkrecht gegen den magnetischen Meridian gerade auf die

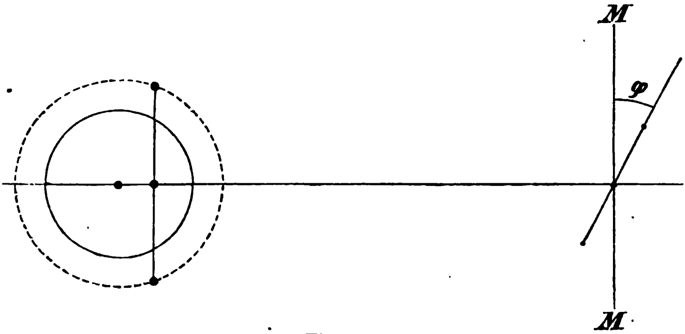


Fig. 13.

vertikale Drehungsaxe der Nadel gerichtet. Wir nehmen diese Axe der Polarcoordinaten zur x-Axe rechtwinkliger Coordinaten, rechnen die y horizontal in der Richtung des Meridians und die z vertikal.

Dadurch wird $r\mu = x$, mithin nach (6.)

$$(9.)\qquad V_a = A \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \frac{R_1^2}{2} (1 - \mathsf{M}^2) \frac{x}{r^3}, \quad \text{wo } r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Componenten der Wirkung des *Stromes* auf den Punkt a oder xyz sind daher folgende:

$$(10.)\qquad \begin{cases} X = -A \frac{\pi j}{\sqrt{2}} R_1^2 (1 - \mathsf{M}^2) \frac{\partial \left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial x} = -F \frac{\partial \left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial y}, \\ Y = -A \frac{\pi j}{\sqrt{2}} R_1^2 (1 - \mathsf{M}^2) \frac{\partial \left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial y} = -F \frac{\partial \left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial y}, \\ Z = -A \frac{\pi j}{\sqrt{2}} R_1^2 (1 - \mathsf{M}^2) \frac{\partial \left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial z} = -F \frac{\partial \left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial z}; \end{cases}$$

und zu diesen Componenten $X\,Y\,Z$ stehen, wie aus (7'.) folgt, die Componenten $X_1\,Y_1\,Z_1$ der von der *Kugel* ausgeübten Wirkung in folgender Beziehung:

$$(11.)\qquad \begin{cases} X_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa}\, 2 \left(\frac{R}{R_1}\right)^3 X, \\ Y_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa}\, 2 \left(\frac{R}{R_1}\right)^3 Y, \\ Z_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa}\, 2 \left(\frac{R}{R_1}\right)^3 Z. \end{cases}$$

Für jede Stelle der Nadel ist offenbar:

$$z = 0, \quad \text{mithin} \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Nehmen wir nun die Dimensionen der Nadel *sehr klein* an, so können wir y^2 gegen x^2 vernachlässigen, was darauf hinauskommt, dass wir die von Kugel und Strom herrührenden Kräfte innerhalb der Nadel als constant ansehen. Wir setzen also nach der Differentiation:

$$y = 0 \quad \text{und} \quad r^2 = x^2.$$

Dadurch wird

$$(12.)\quad \begin{cases} X = -F\left(\dfrac{\partial\left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial x}\right)_{x=r} = +F\dfrac{2}{r^3}, \\ Y = -F\left(\dfrac{\partial\left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \\ Z = -F\left(\dfrac{\partial\left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial z}\right)_{z=0} = 0. \end{cases}$$

Wirkt nun ausser dem Erdmagnetismns nur der Strom auf die Nadel, so haben wir, da die x-Componente des Erdmagnetismus bei der gewählten Richtung der Coordinatenaxen $= 0$ ist, und die vertikale z-Componente auf die Deklinationsnadel keine Wirkung ausüben kann, in der Richtung der x nur die Componente X, andererseits in der der y nur die horizontale Componente H des Erdmagnetismus. Ist also φ die durch den Strom bewirkte Ablenkung der Nadel aus dem Meridian, so ergiebt sich

$$(13.)\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{X}{H} = \frac{2F}{r^3 H}.$$

Wird jetzt auch die Kugel in der früher angegebenen Weise (vergl. die Fig. Seite 94) aufgestellt, so tritt eine grössere *Ablenkung* φ' ein, welche sich bestimmt mittelst der Formel:

$$(14.)\quad \operatorname{tang}\varphi' = \frac{X + X_1}{H} = \frac{2F}{r^3 H}\left(1 + \frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa}\, 2\left(\frac{R}{R_1}\right)^3\right).$$

Hieraus folgt:

$$(15.)\quad \frac{\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi} = 2\,\frac{\frac{4}{3}\pi\varkappa}{1 + \frac{4}{3}\pi\varkappa}\left(\frac{R}{R_1}\right)^3.$$

Man braucht also nur die beiden Ablenkungen φ und φ' zu beobachten und R und R_1 zu messen, um unmittelbar den Werth von $\varkappa$ zu erhalten. *Es ist dies eine der bequemsten und sichersten Methoden, um die Constante $\varkappa$ und deren Abhängigkeit von der Temperatur und anderen Einflüssen näher zu studiren.*

Um sich zu überzeugen, ob die gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, hat man die Beobachtung für ein anderes r zu wiederholen. Erhält man alsdann für $\varkappa$ nicht mehr denselben Werth, so war r zu klein, als dass die gemachten Vernachlässigungen erlaubt wären. Eine Kugel von 4 Zoll Durchmesser gab (NB. aus der Erinnerung angegeben) für Entfernungen von etwa 2 Fuss constante Resultate.

§ 35.

Potential und Wirkung mehrerer Kreisströme und der durch sie magnetisirten Kugel.

Die Bedingung, dass r sehr gross sei gegen R und R_1, ist zwar leicht zu erfüllen; sie hat indess den Nachtheil, dass durch die grosse Entfernung die Wirkung sehr geschwächt wird. Es ist daher wesentlich, sich von der Voraussetzung eines grossen r befreien zu können. Dies aber wird erreicht durch eine andere Methode der Beobachtung, bei welcher *für jeden Werth* von r die Wirkung sich darstellt durch die ersten Glieder der Reihen für Q_a und V_a. Die Methode besteht darin, dass man, statt des *einen* bisher betrachteten Systems von Kreisströmen, *mehrere* solche Systeme anwendet.

Wir wollen jedes einzelne System kurzweg eine *Rolle* nennen, und die *Anzahl* dieser Rollen oder Systeme mit q bezeichnen. Geht ein und derselbe Strom j durch all diese Rollen, und sind

$$\begin{array}{l} A_1, A_2, A_3, \cdots A_q, \\ R_1, R_2, R_3, \cdots R_q, \\ \mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \mathsf{M}_3, \cdots \mathsf{M}_q, \end{array}$$

die den einzelnen Rollen entsprechenden Werthe von A, R_1 und M, so ergiebt sich aus (12.) § 33 die Formel:

$$(1.)\quad V_a = \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} A_1\left[R_1{}^2 C^{(1)} P^{(1)} \cdot (1-\mathsf{M}_1{}^2)\dfrac{dP^{(1)}}{d\mathsf{M}_1} + R_1{}^3 C^{(2)} P^{(2)} \cdot (1-\mathsf{M}_1{}^2)\dfrac{dP^{(2)}}{d\mathsf{M}_1} + \cdots\right] \\ + A_2\left[R_2{}^2 C^{(1)} P^{(1)} \cdot (1-\mathsf{M}_2{}^2)\dfrac{dP^{(1)}}{d\mathsf{M}_2} + R_2{}^3 C^{(2)} P^{(2)} \cdot (1-\mathsf{M}_2{}^2)\dfrac{dP^{(2)}}{d\mathsf{M}_2} + \cdots\right] \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ + A_q\left[R_q{}^2 C^{(1)} P^{(1)} \cdot (1-\mathsf{M}_q{}^2)\dfrac{dP^{(1)}}{d\mathsf{M}_q} + R_q{}^3 C^{(2)} P^{(2)} \cdot (1-\mathsf{M}_q{}^2)\dfrac{dP^{(2)}}{d\mathsf{M}_q} + \cdots\right] \end{array} \right\}$$

wo die $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, etc. die Bedeutungen haben:

$$C^{(1)} = \frac{1}{2r^2},\quad C^{(2)} = \frac{1}{3r^3},\quad C^{(3)} = \frac{1}{4r^4},\ \text{etc. etc.}$$

Und gleichzeitig ergiebt sich alsdann aus (2.) § 34 auch folgende Formel:

$$(2.)\quad Q_a=\frac{4\pi\varkappa\cdot 2\pi j}{\sqrt{2}}\left\{\begin{array}{l} A_1\left[\left(\frac{1}{R_1}\right)D^{(1)}P^{(1)}(1-\mathsf{M}_1^2)\frac{dP^{(1)}}{d\mathsf{M}_1}+\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 D^{(2)}P^{(2)}(1-\mathsf{M}_1^2)\frac{dP^{(2)}}{d\mathsf{M}_1}+\cdots\right] \\ +A_2\left[\left(\frac{1}{R_2}\right)D^{(1)}P^{(1)}(1-\mathsf{M}_2^2)\frac{dP^{(1)}}{d\mathsf{M}_2}+\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 D^{(2)}P^{(2)}(1-\mathsf{M}_2^2)\frac{dP^{(2)}}{d\mathsf{M}_2}+\cdots\right] \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ +A_q\left[\left(\frac{1}{R_q}\right)D^{(1)}P^{(1)}(1-\mathsf{M}_q^2)\frac{dP^{(1)}}{d\mathsf{M}_q}+\left(\frac{1}{R_q}\right)^2 D^{(2)}P^{(2)}(1-\mathsf{M}_q^2)\frac{dP^{(2)}}{d\mathsf{M}_q}+\cdots\right] \end{array}\right\}$$

wo die $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, etc. die Bedeutungen haben:

$$D^{(1)}=\frac{\frac{R^3}{3r^2}}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa},\quad D^{(2)}=\frac{\frac{R^5}{5r^3}}{1+\frac{8}{5}\pi\varkappa},\quad D^{(3)}=\text{etc. etc.}$$

Zur Abkürzung wollen wir diese Formeln (1.) und (2.) folgendermassen schreiben:

$$(1'.)\qquad V_a=\frac{2\pi j}{\sqrt{2}}\left(S^{(1)}+S^{(2)}+S^{(3)}\cdots\cdot+S^{(n)}+\cdots\cdot\right),$$

$$(2'.)\qquad Q_a=2\pi\varkappa\frac{2\pi j}{\sqrt{2}}\left(T^{(1)}+T^{(2)}+T^{(3)}\cdots\cdot+T^{(n)}+\cdots\cdot\right),$$

indem wir z. B. unter $S^{(1)}$ und $T^{(1)}$ die Summe der *ersten Vertikalreihe* resp. in (1.) und (2.), ebenso unter $S^{(2)}$ und $T^{(2)}$ die Summe der in (1.) resp. in (2.) auftretenden *zweiten Vertikalreihe* verstehen, u. s. w. Alsdann ist offenbar:

$$(1''.)\qquad S^{(n)}=C^{(n)}P^{(n)}\cdot\sum_{p=1}^{p=q}A_pR_p^{n+1}\left(1-\mathsf{M}_p^2\right)\frac{dP^{(n)}}{d\mathsf{M}_p},$$

$$(2''.)\qquad T^{(n)}=D^{(n)}P^{(n)}\cdot\sum_{p=1}^{p=q}A_p\left(\frac{1}{R_p}\right)^n\left(1-\mathsf{M}_p^2\right)\frac{dP^{(n)}}{d\mathsf{M}_p}.$$

Man kann nun über die willkürlichen Elemente A_1, A_2, $\cdots A_q$, R_1, R_2, $\cdots R_q$, M_1, M_2, $\cdots \mathsf{M}_q$ der Art disponiren, dass alle Glieder S, T vom *zweiten* ab, d. i.

$$(3.)\qquad \begin{array}{l} S^{(2)},\ S^{(3)},\ S^{(4)},\ \ldots\ldots \\ T^{(2)},\ T^{(3)},\ T^{(4)},\ \ldots\ldots \end{array}$$

bis zu einer gewissen Stellenzahl hin verschwinden. Zu diesem Zweck müssen die Ausdrücke (1″.) und (2″.) gleich Null gesetzt, und die so sich ergebenden Gleichungen aufgelöst werden. Im Allgemeinen dürfte das nicht ohne Schwierigkeit sein. Doch wird die Auflösung dieser Gleichungen wesentlich erleichtert, wenn man

$$(4.)\qquad R_1=R_2=R_3=\cdots=R_q$$

setzt; wobei die q Rollen sich in gewisse q *Parallelkreise ein und derselben Kugelfläche* verwandeln. Alsdann nämlich werden, wie aus

(1″.), (2.″) ersichtlich, sowohl $S^{(n)}$ als $T^{(n)}$ verschwinden, sobald die Gleichung erfüllt ist:

$$(5.)\qquad \sum_{p=1}^{p=q} A_p \left(1 - \mathsf{M}_p^2\right) \frac{dP^{(n)}}{d\mathsf{M}_p} = 0.$$

Um näher auf die Sache einzugehen, sind gewisse von *Neumann* entdeckte merkwürdige Eigenschaften der Kugelfunktionen*) erforderlich. Aus diesen Eigenschaften (auf die wir hier nicht näher uns einlassen wollen) geht hervor, dass die Gleichung (5.)

$$(6.)\qquad \text{für } n = 2, 3, 4, 5, \cdots (2q-3), (2q-2)$$

erfüllt wird, oder mit andern Worten, dass

$$(7.)\qquad \begin{matrix} S^{(2)}, S^{(3)}, S^{(4)}, \ldots S^{(2q-2)}, \\ \text{und } T^{(2)}, T^{(3)}, T^{(4)}, \ldots T^{(2q-2)} \end{matrix}$$

verschwinden, sobald man

$$(8.)\qquad A_1 = \gamma \mathsf{A}_1, \quad A_2 = \gamma \mathsf{A}_2, \cdots \quad A_q = \gamma \mathsf{A}_q$$

setzt (wo γ ein willkürlicher Faktor sein soll), und sodann die A_1, $\mathsf{A}_2, \cdots \mathsf{A}_q$ und $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \cdots \mathsf{M}_q$ folgenden $2q$ Gleichungen unterwirft:

$$(9.)\qquad \begin{array}{lllll}
\mathsf{A}_1 & + \mathsf{A}_2 & + \mathsf{A}_3 \cdots & + \mathsf{A}_q & = \frac{1}{1} \\
\mathsf{A}_1\mathsf{M}_1 & + \mathsf{A}_2\mathsf{M}_2 & + \mathsf{A}_3\mathsf{M}_3 \cdots & + \mathsf{A}_q\mathsf{M}_q & = 0, \\
\mathsf{A}_1\mathsf{M}_1^2 & + \mathsf{A}_2\mathsf{M}_2^2 & + \mathsf{A}_3\mathsf{M}_3^2 \cdots & + \mathsf{A}_q\mathsf{M}_q^2 & = \frac{1}{3} \\
\mathsf{A}_1\mathsf{M}_1^3 & + \mathsf{A}_2\mathsf{M}_2^3 & + \mathsf{A}_3\mathsf{M}_3^3 \cdots & + \mathsf{A}_q\mathsf{M}_q^3 & = 0, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mathsf{A}_1\mathsf{M}_1^{2q-2} & + \mathsf{A}_2\mathsf{M}_2^{2q-2} & + \mathsf{A}_3\mathsf{M}_3^{2q-2} \cdots & + \mathsf{A}_q\mathsf{M}_q^{2q-2} & = \frac{1}{2q-1}, \\
\mathsf{A}_1\mathsf{M}_1^{2q-1} & + \mathsf{A}_2\mathsf{M}_2^{2q-1} & + \mathsf{A}_3\mathsf{M}_3^{2q-1} \cdots & + \mathsf{A}_q\mathsf{M}_q^{2q-1} & = 0,
\end{array}$$

deren *rechte* Seiten der Reihe nach durch

$$\frac{1}{1}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, 0 \cdots \frac{1}{2q-1}, 0$$

dargestellt sind. Auch geht ferner aus jenen Eigenschaften hervor, dass die durch diese Gleichungen (9.) sich bestimmenden Werthe von $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \cdots \mathsf{M}_q$ nichts Anderes sind als die q Wurzeln der Gleichung

$$(10.)\qquad P^{(n)}(\mathsf{M}) = 0.$$

Bei Anwendung dieser Methode *verschwinden*, wie gesagt, die Glieder (7.), so dass sich also die Formeln (1′.), (2′.) auf folgende reduciren:

$$(11.)\qquad V_a = \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \left(S^{(1)} + 0 + S^{(2q-1)} + S^{(2q)} + \cdots\right),$$

---

*) *Neumann* (1838.): *Ueber eine neue Eigenschaft des Laplace'schen Ypsilons, etc.*, in Schumachers Astron. Nachr. Bd. 15, S. 313. Von Neuem abgedruckt in den Mathemat. Annalen, Bd. 14, S. 567.

(12.) $$Q_a = 2\pi\varkappa \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \left(T^{(1)} + 0 + T^{(2q-1)} + T^{(2q)} + \cdots\right).$$

Denkt man sich z. B. 7 Rollen, also $q = 7$, so ergiebt sich:

(11'.) $$V_a = \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \left(S^{(1)} + 0 + S^{(13)} + S^{(14)} + S^{(15)} + \cdots\right),$$

(12'.) $$Q_a = 2\pi\varkappa \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \left(T^{(1)} + 0 + T^{(13)} + T^{(14)} + T^{(15)} + \cdots\right),$$

also mit einem ganz unmerklichen Fehler:

(11''.) $$V_a = \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} S^{(1)},$$

(12''.) $$Q_a = 2\pi\varkappa \frac{2\pi j}{\sqrt{2}} T^{(1)}.$$

In diesem Fall $q = 7$ sind $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \cdots \mathsf{M}_7$ [vgl. (10.)] die sieben Wurzeln der Gleichung:

(13.) $$P^{(7)}(\mathsf{M}) = 0.$$

Eine dieser Wurzeln ist $\mathsf{M} = 0$; und nach Absonderung derselben bleibt noch eine für M^2 cubische Gleichung zurück. Die Auflösung derselben ergiebt, falls man wie früher $\mathsf{M} = \cos\Theta$ setzt, folgende Werthe:

(14.) $$\begin{cases} \Theta_1 = 23^0\,56' \\ \Theta_2 = 47^0\,52' \\ \Theta_3 = 71^0\,38' \\ \Theta_4 = 90^0 \,-. \end{cases}$$

Hierdurch bestimmen sich die Lagen von *vier* Rollen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4$. Dass die letzte derselben $\mathfrak{R}_4$ im Aequator der Kugelfläche sich befindet, und dass die *drei* übrigen $\mathfrak{R}_5, \mathfrak{R}_6, \mathfrak{R}_7$ resp. zu $\mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_1$ in Bezug auf den Aequator symmetrisch liegen, bedarf kaum noch der Erwähnung.

Nachdem die M oder Θ bestimmt sind, kann man nun mittelst der Gleichungen (9.) die A berechnen, und erhält alsdann schliesslich die A mittelst der Gleichungen (8.), d. h. dadurch, dass man die A alle mit ein und demselben *willkürlichen* Faktor γ multiplicirt. Man kann also *eines* der A *willkürlich* wählen. Nimmt man z. B. das der (im Aequator liegenden) Rolle $\mathfrak{R}_4$ zugehörige $A_4 = 100$, so erhält man:

(15.) $$\begin{cases} A_1 = A_7 = 57, \\ A_2 = A_6 = 78, \\ A_3 = A_5 = 168, \\ \phantom{A_3 = {}} A_4 = 100. \end{cases}$$

Es kommt nur auf die Verhältnisse der A an; behält man diese bei, so kann man die absolute Zahl der Windungen beliebig ändern.

Denselben Zweck, die Darstellung der Wirkung durch das *erste* Glied der Reihen für V_a und Q_a, kann man auch dadurch erreichen,

dass man die Verhältnisse der Stromstärken in den einzelnen Windungen durch einen zweckmässig gewählten Widerstand so einrichtet, dass die gewünschte Anzahl Glieder in der Summe verschwindet.

Man kann dieses endlich auch durch die Zahl der Umgänge und die Stromstärken zugleich bewirken.

§ 36.
Die Tangentenboussole.

Die beschriebene Anordnung giebt, wenn man statt der Kugel eine Magnetnadel innerhalb der Kreisströme aufhängt, einen *vorzüglichen Multiplikator.* Auf die Nadel desselben (wenn sie nicht äusserst nahe an die Drahtwindungen hinangebracht wird) wirkt nämlich dann eine vom Orte unabhängige, eine *constante* Kraft, *constant in demselben Sinne, wie der Erdmagnetismus constant ist.*

Nach Gleichung (11.) § 33 haben wir für q in der angegebenen Weise aufgestellte Rollen

$$(1.)\quad V_i = -\frac{2\pi j}{\sqrt{2}}\sum_{p=1}^{p=q} A_p\left[\left(1-\mathsf{M}_p\right)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{R_1}\right)^n P^{(n)}\left(1-\mathsf{M}_p^2\right)\frac{dP^{(n)}}{d\mathsf{M}_p}\right].$$

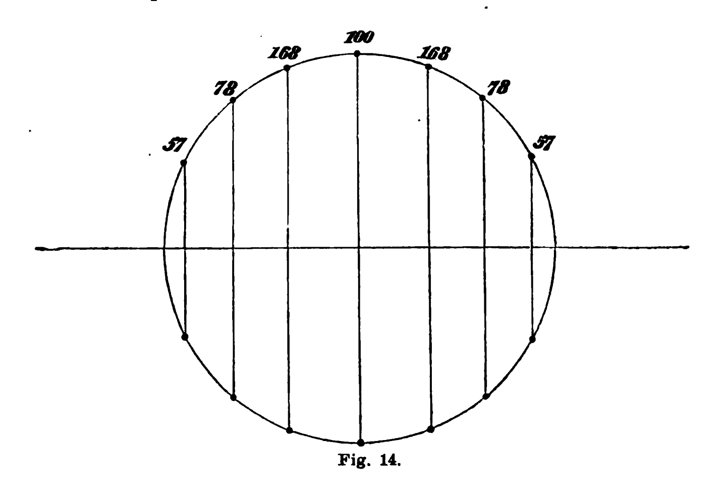


Fig. 14.

Wir können auf die angegebene Weise hier wiederum

$$\sum_{p=0}^{p=q} A_p\left(1-\mathsf{M}_p^2\right)\frac{dP^{(n)}}{d\mathsf{M}_p}=0$$

machen für alle Glieder, welche $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... $P^{(2q-2)}$ enthalten. Es bleibt ausser dem $P^{(1)}$ enthaltenden Gliede alsdann nur dasjenige übrig, welches mit $P^{(2q-1)}\left(\frac{r}{R_1}\right)^{2q-1}$ behaftet ist, sowie die noch weiter

folgenden Glieder. Ist nun z. B. $q = 7$ und $\frac{r}{R_1}$ etwa $= \frac{1}{2}$, so wird dieses $\left(\frac{r}{R_1}\right)^{2q-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{13}$, also schon ganz unmerklich. Man kann aber die Nadel noch kleiner machen, so dass $\frac{r}{R_1} < \frac{1}{2}$ ist. In solchem Falle reducirt sich also die Formel (1.) auf:

$$(2.)\, V_i = -\frac{2\pi j}{\sqrt{2}} \sum_{p=1}^{p=q} A_p \left[\left(1 - \mathsf{M}_p\right) + \frac{r\mu}{R_1}\left(1 - \mathsf{M}_p^2\right)\right] = \alpha + \frac{\beta r \mu}{R_1} = \alpha + \frac{\beta x}{R_1},^{*})$$

die x gerechnet in der Axe des Polarcoordinatensystems, welche die Mittelpunkte sämmtlicher Stromkreise verbindet. Das Potential ist in diesem Falle eine lineare Funktion von x, die Kraft also constant. Dieselbe wirkt parallel der Axe. So lange die Intensität j dieselbe bleibt, wirken auf die Nadel nur die constanten Kräfte H und $\frac{\beta}{R_1}$.

Dieser Apparat repräsentirt eine zu Messungen vorzüglich geeignete *Tangentenboussole.* Die Anwendung der gewöhnlich so genannten beruht auf der Vernachlässigung von $\left(\frac{r}{R_1}\right)^4$, woher die Vorschrift, dass der Durchmesser des Kreises etwa 6—7mal so gross sein soll als die Länge der Nadel. Doch reicht dies nicht aus. Vielmehr müsste man, falls man den einfachen Kreisstrom beibehalten will, (nach *Neumann's* Erfahrungen) jenes Verhältniss noch viel grösser machen.

§ 37.

Magnetischer Zustand einer unter dem Einflusse constanter magnetischer Kräfte rotirenden Kugel.

Die Anwendungen auf die Wirkung mit der Zeit variabeler magnetischer Kräfte sind beinahe ganz auf die Kugel beschränkt. Wir nehmen an, eine durch constante Kräfte, etwa den Erdmagnetismus, magnetisirte homogene Kugel aus weichem Eisen *rotire um eine durch ihren Mittelpunkt gelegte Axe, die x-Axe.* Der magnetische Zustand jeder einzelnen Stelle ist mit der Zeit variabel. Wir bestimmen die Wirkung der Kugel auf einen äusseren Punkt, um sie mit der der ruhenden zu vergleichen.

Wir erhalten aus Gleichung (1.) § 17, wenn wir für ϑ jetzt τ schreiben:

$$(1.) \qquad \varphi + \int_0^t d\tau f'(t - \tau) \left\{V + Q - \frac{4}{3}\pi\varphi\right\} = 0,$$

und aus Gleichung (9.) § 16:

*) wo α und β Constanten sind.

(2.) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \beta, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \gamma,$$

endlich aus Gleichung (5.) § 17:

(3.) $$Q = \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_i.$$

Der Annahme gemäss ist ferner:

(4.) $$V = -(Ax + By + Cz).$$

Für die mit der Zeit t variirenden Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes der Kugel nehmen wir folgende Ausdrücke:

(5.) $$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \vartheta, \\ y &= r \sin \vartheta \cos (\omega + nt), \\ z &= r \sin \vartheta \sin (\omega + nt), \end{aligned}$$

wo r, ϑ, ω, n Constanten*) sind, und insbesondere n *die Winkelgeschwindigkeit* der Rotation bezeichnet. Die Coordinaten eines *Oberflächenpunktes* seien

(6.) $$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \vartheta_1, \\ y_1 &= R \sin \vartheta_1 \cos (\omega_1 + nt), \\ z_1 &= R \sin \vartheta_1 \sin (\omega_1 + nt). \end{aligned}$$

Dadurch wird

(7.) $$V = -r[A \cos \vartheta + B \sin \vartheta \cos (\omega + nt) + C \sin \vartheta \sin (\omega + nt)].$$

Wir werden zeigen, dass auch für φ eine *lineare* Funktion genügt, diese also die vollständige und einzige (§ 17) Lösung ist. Setzt man nämlich:

(8.) $$\varphi = Mx + Ny + Pz,$$

oder was dasselbe:

(8'.) $$\varphi = r[M \cos \vartheta + N \sin \vartheta \cos (\omega + nt) + P \sin \vartheta \sin (\omega + nt)],$$

so wird:

(8a.) $$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial r}} = [M \cos \vartheta_1 + N \sin \vartheta_1 \cos (\omega_1 + nt) + P \sin \vartheta_1 \sin (\omega_1 + nt)].$$

Für die Entfernung eines Punktes im Innern von einem an der Oberfläche gilt die Formel:

(9.) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR[\cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos (\omega - \omega_1)]}},$$

oder, weil $r < R$ ist, auch folgende Formel:

(9'.) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{Q^{(0)}}{R} + \frac{rQ^{(1)}}{R^2} + \frac{r^2 Q^{(2)}}{R^3} + \cdots + \frac{r^n Q^{(n)}}{R^{n+1}} + \cdots$$

Lösen wir in Gleichung (8a.) die Cosinus auf und setzen wir:

*) d. h. unabhängig von der Zeit.

$$(10.)\quad \begin{aligned} N\cos nt + P\sin nt &= N_1, \\ -N\sin nt + P\cos nt &= P_1, \end{aligned}$$

so folgt (weil $do = R^2 \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\omega_1$ ist) aus Gleichung (3):

$$(11.)\; Q_i = R^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta_1\, d\omega_1 \sin\vartheta_1\, [M\cos\vartheta_1 + N_1 \sin\vartheta_1 \cos\omega_1 + P_1 \sin\vartheta_1 \sin\omega_1]}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\,[\cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos(\omega - \omega_1)]}}.$$

Dieser Ausdruck hat ganz dieselbe Form wie Gleichung (7.) § 18, die Integration lässt sich leicht nach der dort angewandten Methode ausführen. Ebenso einfach gelangt man aber auch zum Ziele durch Einführung der Kugelfunktionen.

Da nämlich φ für r linear ist, mithin die Entwickelung nach Kugelfunktionen auf ein einziges Glied:

$$\varphi = \varphi^{(1)}$$

sich reducirt, so erhält man:

$$Q_i = R^2 \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} d\mu_1\, d\omega_1\, \frac{\partial \overline{\varphi^{(1)}}}{\partial r} \left(\frac{Q^{(0)}}{R} + \frac{rQ^{(1)}}{R^2} + \frac{r^2 Q^{(2)}}{R^3} + \cdots + \frac{r^n Q^{(n)}}{R^{n+1}} + \cdots \right).$$

Bei Ausführung dieser Integration verschwinden (nach bekannten Eigenschaften der Kugelfunktionen) alle Glieder bis auf das zweite. Also wird:

$$(12.)\quad Q_i = \frac{4}{3}\pi r \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} = \frac{4}{3}\pi r \left[M\cos\vartheta + N_1 \sin\vartheta \cos\omega + P_1 \sin\vartheta \sin\omega \right],$$

oder mit Rücksicht auf (10.):

$$(12').\quad Q_i = \frac{4}{3}\pi r \Big[M\cos\vartheta + N\sin\vartheta \cos(\omega + nt) + P\sin\vartheta \sin(\omega + nt \Big].$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass wir wirklich durch gewisse (nur von A, B, C abhängende) Werthe der Constanten M, N, P unseren Gleichungen genügen können. Um näher hierauf einzugehen, setzen wir die Werthe für V, Q, φ ein in die Gleichung (1.) und erhalten alsdann, weil $Q = \frac{4}{3}\pi\varphi$ ist, folgende Formel:

$$r\,[M\cos\vartheta + N\sin\vartheta \cos(\omega + nt) + P\sin\vartheta \sin(\omega + nt)] =$$

$$= \int_0^t d\tau f'(t - \tau)\, r\,[A\cos\vartheta + B\sin\vartheta \cos(\omega + n\tau) + C\sin\vartheta \sin(\omega + n\tau)].$$

Unter dem Integralzeichen setzen wir jetzt:

$$(\omega + n\tau) = (\omega + nt) - n(t - \tau)$$

und erhalten alsdann durch Auflösen der Cosinus und Sinus:

$$r[M\cos\vartheta + N\sin\vartheta\cos(\omega+nt) + P\sin\vartheta\sin(\omega+nt)] = rA\cos\vartheta\int_0^t d\tau f'(t-\tau) +$$

$$(13.)\quad + r\sin\vartheta\cos(\omega+nt)\int_0^t d\tau f'(t-\tau)\,[B\cos n(t-\tau) - C\sin n(t-\tau)] +$$

$$+ r\sin\vartheta\sin(\omega+nt)\int_0^t d\tau f'(t-\tau)\,[B\sin n(t-\tau) + C\cos n(t-\tau)].$$

Von diesen Integralen lässt sich das erste unmittelbar ausführen; es ist nämlich [vrgl. § 14 und namentlich (8'.) § 18] für nicht sehr kleine t:

$$(14.)\qquad \int_0^t d\tau f'(t-\tau) = f(t) - f(0) = p,$$

wo die Constante p dieselbe Bedeutung hat wie in § 12 *und weiterhin.*

Da $f(t)$ für merkliche Werthe des Argumentes constant wird, folglich $f'(t)$ verschwindet, so erhalten auch die anderen Integrale constante, von t unabhängige Werthe:

$$(15.)\qquad \int_0^t d\tau\, f'(t-\tau)\cos n(t-\tau) = c,$$

$$(16.)\qquad \int_0^t d\tau\, f'(t-\tau)\sin n(t-\tau) = s.$$

Es ist zu bemerken, dass s weit kleiner ist als c, da für kleine $(t-\tau)$, für welche allein $f'(t-\tau)$ endliche Werthe hat, $\sin n(t-\tau)$ kleiner ist als $\cos n(t-\tau)$, es sei denn, dass n ausserordentlich gross wäre.

Durch Einsetzen in Gleichung (13.) erhalten wir:

$$(17.)\qquad r[M\cos\vartheta + N\sin\vartheta\cos(\omega+nt) + P\sin\vartheta\sin(\omega+nt)] =$$
$$= r[pA\cos\vartheta + (cB - sC)\sin\vartheta\cos(\omega+nt) + (sB+cC)\sin\vartheta\sin(\omega+nt)],$$

und hieraus, da diese Gleichung für jedes ϑ, ω und t gilt:

$$(18.)\qquad M = pA \qquad N = cB - sC \qquad P = sB + cC.$$

Somit haben wir die Constanten M, N, P vollständig bestimmt. Substituiren wir die Werthe dieser Constanten in (8'.) und (8a.), so erhalten wir:

$$(19.)\quad \varphi = r[pA\cos\vartheta + (cB-sC)\sin\vartheta\cos(\omega+nt) + (sB+cC)\sin\vartheta\sin(\omega+nt)],$$

$$(20.)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = pA\cos\vartheta_1 + (cB-sC)\sin\vartheta_1\cos(\omega_1+nt) + (sB+cC)\sin\vartheta_1\sin(\omega_1+nt).$$

§ 38.

Wirkung der Kugel auf äussere Punkte.

Wir bestimmen jetzt die Wirkung auf einen äusseren Punkt, dessen Coordinaten r, ϑ, ω sind. Die Entfernung eines solchen Punktes von einem Punkte der Oberfläche ist *nicht mehr* wie die eines Massentheilchens innerhalb der Kugel unabhängig von der Zeit. Wir erhalten:

$$(1.)\quad Q_a = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\omega_1\, [pA\cos\vartheta_1 + (cB - sC)\sin\vartheta_1 \cos(\omega_1 + nt) + (sB + cC)\sin\vartheta_1 \sin(\omega_1 + nt)]}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\,[\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\omega - \omega_1 - nt)]}}.$$

Setzen wir nun:

$$\omega_1 + nt = \psi_1,$$
$$d\omega_1 = d\psi_1,$$

so bleiben die Grenzen der Integration ungeändert; und wir erhalten also:

$$(2.)\quad Q_a = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\psi_1\, [pA\cos\vartheta_1 + (cB - sC)\sin\vartheta_1\cos\psi_1 + (sB + cC)\sin\vartheta_1\sin\psi_1]}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\,[\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\omega - \psi_1)]}}.$$

Hieraus folgt, mittelst der auf Gleichung (7.) § 18 oder der auf Gleichung (11.) § 37 angewandten Methode, sofort:

$$(3.)\quad Q_a = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{r^2}\Big[pA\cos\vartheta + (cB - sC)\sin\vartheta\cos\omega + (sB + cC)\sin\vartheta\sin\omega\Big],$$

oder was dasselbe ist:

$$(3'.)\quad Q_a = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{r}\right)^3\Big[pAx + (cB - sC)\,y + (sB + cC)\,z\Big],$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$(3''.)\quad Q_a = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{r}\right)^3 p\left[Ax + \frac{cB - sC}{p}\,y + \frac{sB + cC}{p}\,z\right],$$

wo:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Wirkung der durch constante Kräfte magnetisirten, homogenen mit constanter Geschwindigkeit rotirenden Kugel auf äussere Punkte ist also nicht mit der Zeit variabel.

Nehmen wir für den Augenblick an, die Kugel *ruhe*, setzen wir also $n = 0$, so wird [Gleichung (15.) und (16.) § 37]:

$$s = 0,\quad \text{und}\quad c = p,$$

mithin

$$(3a.)\quad (Q_a) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{r}\right)^3 p\,[Ax + By + Cz],$$

welcher Ausdruck mit Gleichung (15.) § 18 identisch ist. [Man beachte die zwischen p und $\varkappa$ stattfindende Relation (4.) Seite 31.]

Die Vergleichung mit (3″.) zeigt, dass die Wirkung der rotirenden Kugel auf äussere Punkte *ungeändert* bleibt, wenn man jene Rotationsbewegung *sistirt*, dann aber die Magnetisirung der Kugel nicht mehr mittelst der Kräfte A, B, C, sondern mittelst gewisser *anderer* constanter Kräfte A_1, B_1, C_1 bewirkt, die folgende Werthe haben:

$$(4.)\qquad A_1 = A, \quad B_1 = \frac{cB - sC}{p}, \quad C_1 = \frac{sB + cC}{p}.$$

Nehmen wir, um dies Resultat noch deutlicher hervortreten zu lassen, an, die x- und z-Axe lägen in der Ebene des magnetischen Meridians, Dann ist die y-Componente des Erdmagnetismus

$$B = 0,$$

folglich das Potential der durch den Erdmagnetismus magnetisirten Kugel, wenn sie ruht:

$$(5.)\qquad (Q_a) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{r}\right)^3 p \cdot [Ax + Cz], \quad \text{[vrgl. (3a.)]}$$

dagegen, wenn sie *rotirt*:

$$(6.)\qquad Q_a = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{r}\right)^3 p \cdot \left[Ax - \frac{s}{p}Cy + \frac{c}{p}Cz\right], \quad \text{[vrgl. (3'.)]}.$$

Es verhält sich also bei der rotirenden Kugel so, als hätte der Erdmagnetismus noch eine Componente in der Richtung senkrecht gegen die Ebene des Meridians. Dies ist vielleicht der prägnanteste Unterschied zwischen der Wirkung der rotirenden und der der ruhenden Kugel.

§ 39.

Ablenkung einer Deklinationsnadel durch die rotirende Kugel.

Es sei nun in einiger Entfernung von der um die horizontale (in der Ebene des magnetischen Meridians liegenden) x-Axe rotirenden Kugel eine Deklinationsnadel aufgestellt, deren Drehungsaxe parallel der vertikalen z-Axe ist. Wir suchen den Winkel φ, um welchen die Nadel durch die Wirkung der Kugel aus dem Meridian abgelenkt wird.

Es seien ξ, η, ζ die relativen, auf den Mittelpunkt x, y, z der Nadel bezogenen Coordinaten eines magnetischen Massenelementes μ der Nadel. Ferner mögen die Componenten der Wirkung der Kugel auf einen Punkt der Nadel bezeichnet sein durch:

$$(1.)\qquad X = -\frac{\partial Q_a}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial Q_a}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial Q_a}{\partial z}.$$

Das Drehungsmoment dieser Kräfte in Bezug auf die der z-Axe parallele durch xyz gehende Drehungsaxe der Nadel ist gleich:

$$\sum \mu\,(\xi Y - \eta X),$$

die Drehung positiv gerechnet in der Richtung von der positiven x-Axe zur positiven y-Axe. Andererseits hat das Drehungsmoment des Erdmagnetismus, weil $B = 0$ ist, den Werth:

$$\sum \mu \eta A.$$

Somit ergiebt sich für das *ganze* Drehungsmoment der Ausdruck:

$$(2.) \qquad \sum \mu \xi Y - \sum \mu \eta (A + X).$$

Nehmen wir nun die Nadel so klein an, dass wir von den Aenderungen, welche X und Y innerhalb des Raumes erfahren, in dem sich die Nadel bewegt, abstrahiren können, so wird dieses Drehungsmoment (2.) auch so geschrieben werden können:

$$(3.) \qquad Y \Sigma \mu \xi - (A + X) \Sigma \mu \eta.$$

Genauere Werthe würde man erhalten durch Entwickelung nach ξ und η und Vernachlässigung der höheren Potenzen dieser Grössen.

Wir können nun die in (3.) auftretenden Summen, d. i. die magnetischen Momente der Nadel:

$$\Sigma \mu \xi \text{ und } \Sigma \mu \eta$$

ausdrücken*) durch das *Hauptmoment* m:

$$(4.) \qquad \Sigma \mu \xi = m \cos \varphi, \qquad \Sigma \mu \eta = m \sin \varphi; \quad (\text{vrgl. § 4}).$$

Durch Substitution dieser Werthe in (3.) erhalten wir für das Gleichgewicht der Nadel die Formel:

$$(5.) \qquad m \cos \varphi \, Y - m \sin \varphi \, (A + X) = 0,$$

und folglich:

$$(6.) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{Y}{A + X}.$$

Diese Formel gewinnt mit Rücksicht auf (6.) § 38 folgende Gestalt:

$$(7.) \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{-\dfrac{\partial Q_a}{\partial y}}{A - \dfrac{\partial Q_a}{\partial x}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 p \left[\dfrac{sC}{pr^3} + 3\left(\dfrac{Ax - \frac{s}{p} Cy + \frac{c}{p} Cz}{r^5}\right)_y\right]}{A - \frac{4}{3}\pi R^3 p \left[\dfrac{A}{r^3} - 3\left(\dfrac{Ax - \frac{s}{p} Cy + \frac{c}{p} Cz}{r^5}\right)_x\right]}.$$

Befindet sich z. B. die Nadel vertikal unterhalb oder oberhalb der Kugel, ist also

$$(\text{I.}) \qquad x = y = 0,$$

*) Die Bedeutung von φ ist aus den Formeln (4.) unmittelbar ersichtlich. Offenbar bezeichnet nämlich φ die Ablenkung der Nadel (d. i. ihrer magnetischen Axe) aus der xz-Ebene (d. i. aus dem magnetischen Meridian). *Und zwar ist der Winkel φ, wie aus den Formeln (4.) ersichtlich, gerechnet in der Richtung von der x-Axe zur y-Axe.*

so wird nach (7.):

$$\text{(8.)} \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{sC}{r^3}}{A\left[1 - \frac{4}{3}\pi p \left(\frac{R}{r}\right)^3\right]}.$$

Ist hingegen nicht x, sondern *nur*

$$\text{(II.)} \qquad y = 0,$$

befindet sich also die Nadel in demselben Meridian mit dem Mittelpunkte der Kugel, so erhalten wir aus (7.):

$$\text{(9.)} \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{sC}{r^3}}{A - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{r}\right)^3 p \left[A - 3\left(\frac{Ax + \frac{c}{p} Cz}{r^2}\right)x\right]}.$$

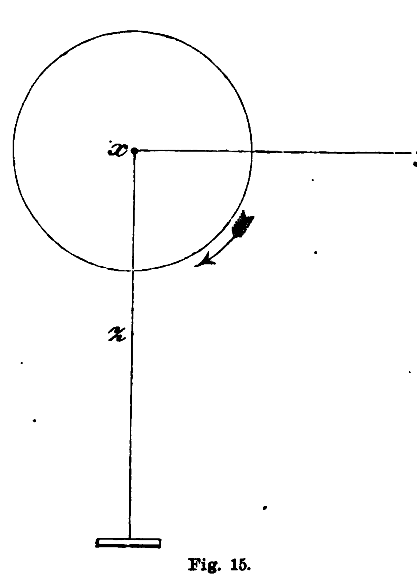


Fig. 15.

Der hier auftretende Nenner ist immer positiv, da nach der Voraussetzung $\frac{R}{r}$ viel kleiner als 1, und (nach § 19) auch $\frac{4}{3}\pi p < 1$ ist*). Demgemäss wird also tang φ ebenfalls positiv, vorausgesetzt, dass wir die Coordinaten so gewählt haben, dass A und C positiv sind, dass also die x-Axe *nach Norden* und die z-Axe *nach Unten* gerichtet ist.

Nehmen wir nun an, die Kugel rotire im Sinne der Rotation der Erde, so haben wir, da die Rotation von der y-Axe zur z-Axe gehen sollte, die y-Axe uns nach *Osten* fortlaufend zu denken. Hieraus aber folgt**), dass φ vom Meridian ab nach Osten positiv zu rechnen ist. *Es wird also die im selben Meridian mit der rotirenden Kugel aufgestellte Nadel mit ihrem Nordende nach Osten abgelenkt*, während eine ruhende, ebenfalls durch den Erdmagnetismus magnetisirte Kugel in diesem Falle gar keine Ablenkung bewirken würde.

Es liegen über diesen Gegenstand Beobachtungen vor von *Barlow*,

---

*) Zufolge der Relationen (4.) Seite 31 und (16.) Seite 49 ist nämlich $\frac{4\pi}{3} p = k$, und nach § 19 ist dieses k in der That < 1.

**) Vrgl. die Note S. 107.

der in einer englischen Artilleriewerkstätte Gelegenheit fand, grosse Kugeln auf Drehbanken rotiren zu lassen. Diese Beobachtungen sind indess nicht von der Art, dass man aus denselben die Constante s bestimmen könnte. Dieselbe wird ausserdem für verschiedene Eisensorten verschieden sein.

Wichtig für die Anwendung auf Maschinen, welche durch Magnete in Bewegung gesetzt werden, ist die Bemerkung, dass durch die Rotation die Wirkung sehr geschwächt wird. In demselben Sinne wirken inducirte Ströme, welche durch die Bewegung hervorgerufen werden. Man kann bis jetzt (da die Untersuchung nicht durchgeführt ist) nicht entscheiden, welcher Theil der Wirkung vom magnetischen Zustande, und welcher von den immer gleichzeitig inducirten elektrischen Strömen herrührt.

§ 40.

Ausdehnung auf den Fall variabler magnetisirender Kräfte.

Es würde nicht schwierig sein, die vorhergehenden Betrachtungen auszudehnen auf den Fall, dass der magnetische Zustand der rotirenden Kugel hervorgerufen wird durch Kräfte, welche nicht constant, sondern beliebige Funktionen der Coordinaten sind.

Man würde V und φ zu entwickeln haben nach Kugelfunktionen. Dadurch würde auch Q in Gestalt einer solchen Entwickelung sich darstellen. Durch Einsetzen dieser Werthe in die Fundamentalgleichung (1.) § 37 erhält man alsdann eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe, die $= 0$ sein muss, und in der also die Glieder gleicher Ordnung *einzeln* verschwinden müssen. Dies liefert die zur Bestimmung der in φ oder vielmehr in $\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}$ vorkommenden Constanten erforderlichen Gleichungen. Die Aufgabe lässt sich also vollständig lösen.

§ 41.

Literatur.

In Bezug auf die Literatur unseres Gegenstandes fügen wir hinzu, dass dieselben Resultate, welche wir (§§ 30—40) für die Kugeln vollständig entwickelt haben, sich auch erhalten lassen für irgend welche *Rotationsellipsoide*. *Neumann's* Abhandlung über diesen Gegenstand findet sich in Crelle's Journal, Bd. 37, Seite 21. Ferner ist die allgemeinere, das *dreiaxige Ellipsoid* betreffende Aufgabe behandelt worden von *Lipschitz*, in seiner Inauguraldissertation, Berlin 1857, gedruckt bei Schade in Berlin. Ausserdem hat endlich *Kirchhoff* den Fall eines

geraden unbegrenzten Cylinders behandelt im Crelle'schen Journal, Bd. 48, Seite 348. Diese drei Fälle sind die einzigen, in denen man bis jetzt zur Lösung des Problems gelangt ist.

Der Fall eines *begrenzten* geraden Cylinders, wie er z. B. in den *Ettinghausen*'schen elektromagnetischen Maschinen angewandt wird, bietet ein ganz besonderes Interesse. Die Lösung der Aufgabe scheint aber sehr grosse Schwierigkeiten zu bieten. Wir besitzen über diesen Gegenstand eine Reihe sehr schöner Beobachtungen von *Lenz* und *Jacobi* in Petersburg. Sie untersuchten den magnetischen Zustand eines von Stromwindungen umgebenen Cylinders aus weichem Eisen, und prüften namentlich den Einfluss, welchen die *Anzahl*, die *Weite* und endlich der *Ort* der Drahtwindungen (falls diese nur einen Theil des Stabes umgeben) ausüben. Die Resultate dieser Untersuchungen obwohl zum Theil wohl nur approximativer Natur, sind sehr beachtenswerth, weil sie sogleich eine Prüfung der Theorie geben würden, sobald sich die Mittel zur Entwickelung einer solchen fänden.

§ 42.
Charakteristische Funktion.

Wir wollen zum Schlusse noch einige allgemeine Sätze angeben, welche sich beziehen auf den durch beliebige Kräfte in einem beliegen Körper inducirten magnetischen Zustand.

Die Grundgleichung für den ruhenden Magnetismus Gleichung (1.) § 13 lautet:

$$\varphi_p + V_p + \varkappa \int d\omega \, T_{\omega p} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial \nu} = 0, \tag{1.}$$

wo T für $\frac{1}{\varrho}$ gesetzt ist. Dieselbe gilt für jeden Punkt p im Innern des gegebenen Körpers. — In dieser Gleichung (1.) denken wir uns den Punkt p sehr nahe an der Oberfläche, differenziren sodann nach p, und zwar nach der durch p gehenden Oberflächennormale n, und lassen endlich (nach Ausführung dieser Differentiation) p geradezu *in die Oberfläche*, etwa nach o fallen.*) In solcher Weise ergiebt sich:

$$\frac{\partial \varphi_o}{\partial n} + \frac{\partial V_o}{\partial n} + \varkappa \int d\omega \frac{\partial T_{\omega o}}{\partial n} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial \nu} = 0. \tag{2.}$$

Wir denken uns nun für den Augenblick im Oberflächenpunkte o die Einheit der magnetischen Masse concentrirt (als eine dort fremde, von Aussen her hingelegte Masse), und bestimmen die durch diese

---

*) Dabei verwandelt sich alsdann n in die im Punkte o errichtete Normale; ebenso wie ν die im Punkte ω (d. i. im Element $d\omega$) errichtete Normale vorstellt. Beide Normalen sind *nach Aussen* laufend zu denken.

in dem gegebenen Körper hervorgebrachte Vertheilung des Magnetismus. Um diese zu erhalten, wird

(3.) $$V_p = \frac{1}{\varrho_{op}}, \quad \text{d. i.:} \quad = T_{op}$$

zu setzen, dies in (1.) zu substituiren, und das zugehörige φ zu ermitteln sein. Dieses zugehörige φ bezeichnen wir (zur besseren Unterscheidung) mit ψ, oder genauer mit

(4.) $$\psi_p^o;$$

so dass also folgende mit (1.) analoge Formel stattfindet:

(5.) $$\psi_p^o + T_{op} + \varkappa \int d\omega \, T_{\omega p} \frac{\partial \psi_\omega^o}{\partial \nu} = 0.$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit $\frac{\partial V_o}{\partial n}$, und subtrahiren sodann die mit T_{op} multiplicirte Gleichung (2.); in solcher Weise erhalten wir:

$$\frac{\partial V_o}{\partial n} \psi_p^o - \frac{\partial \varphi_o}{\partial n} T_{op} + \varkappa \frac{\partial V_o}{\partial n} \int d\omega \, T_{\omega p} \frac{\partial \psi_\omega^o}{\partial \nu} - \varkappa T_{op} \int d\omega \frac{\partial T_{\omega o}}{\partial n} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial \nu} = 0,$$

oder, falls wir mit do multipliciren, und sodann über sämmtliche Elemente do der Oberfläche integriren:

$$\int do \left(\frac{\partial V_o}{\partial n} \psi_p^o - \frac{\partial \varphi_o}{\partial n} T_{op} \right) +$$
$$+ \varkappa \iint do \, d\omega \, T_{\omega p} \frac{\partial V_o}{\partial n} \frac{\partial \psi_\omega^o}{\partial \nu} - \varkappa \iint do \, d\omega \, T_{op} \frac{\partial T_{\omega o}}{\partial n} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial \nu} = 0,$$

oder, falls wir im *zweiten* Integral die Buchstaben o, ω, mithin auch n, ν mit einander vertauschen; ausserdem aber zur Abkürzung das *erste* Integral

(6.) $$\int d\omega \left(\frac{\partial V_\omega}{\partial \nu} \psi_p^\omega - \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial \nu} T_{\omega p} \right) = f_p$$

setzen:

$$f_p + \varkappa \iint do \, d\omega \, T_{op} \left(\frac{\partial V_\omega}{\partial \nu} \frac{\partial \psi_o^\omega}{\partial n} - \frac{\partial T_{\omega o}}{\partial n} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial \nu} \right) = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$f_p + \varkappa \int do \left\{ T_{op} \frac{\partial}{\partial n} \int d\omega \left(\frac{\partial V_\omega}{\partial \nu} \psi_o^\omega - T_{\omega o} \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial \nu} \right) \right\} = 0,$$

also mit Rücksicht auf die in (6.) eingeführte Beziehung:

$$f_p + \varkappa \int do \, T_{op} \frac{\partial f_o}{\partial n} = 0.$$

Dies aber ist die Gleichung (5.) § 13, Seite 46, von welcher wir be-

wiesen haben, dass ihr keine Funktion f_p der Coordinaten genügen kann, oder (genauer ausgedrückt), dass das durch sie bestimmte $f_p = 0$ sein muss. Wir erhalten somit:

$$f_p = 0,$$

oder, falls wir für f_p seine eigentliche Bedeutung (6.) substituiren:

$$\int d\omega \left(\frac{\partial V_\omega}{\partial \nu} \psi_p^\omega - \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial \nu} T_{\omega p} \right) = 0. \tag{7.}$$

Multipliciren wir endlich diese Formel mit $\varkappa$, und addiren sie sodann zur Formel (1.), so folgt:

$$\varphi_p + V_p + \varkappa \int d\omega \frac{\partial V_\omega}{\partial \nu} \psi_p^\omega = 0, \tag{8.}$$

oder anders geschrieben:

$$\varphi_p = - V_p - \varkappa \int d\omega \frac{\partial V_\omega}{\partial \nu} \psi_p^\omega. \tag{9.}$$

Ist nun das Potential V der äusseren Kräfte in beliebiger Weise gegeben, so kann man mittelst dieser Formel (9.) das zugehörige φ berechnen, — vorausgesetzt, dass zuvor die in (4.) definirte Funktion ψ_p^o ermittelt ist. Mit andern Worten: *Durch die Formel* (9.) *wird das Problem der magnetischen Induktion für einen gegebenen homogenen Körper reducirt auf die Ermittelung einer gewissen Funktion* ψ_p^o, *welche lediglich abhängt von der Oberfläche jenes Körpers.* Demgemäss nennt *Neumann* diese Funktion ψ_p^o die *charakteristische Funktion* jener Oberfläche resp. des gegebenen Körpers. Dieselbe spielt, wie man sieht, bei der *magnetischen* Induktion eine ähnliche Rolle, wie die bekannte *Green*'sche *Funktion* bei der *elektrischen* Induktion, resp. bei den Problemen des stationären Temperaturzustandes.

Als passendes Beispiel würde die Anwendung dieser charakteristischen Funktion ψ_p^o auf die *Kugel* zu empfehlen sein.

§ 43.

Magnetische Momente eines durch beliebige Kräfte magnetisirten Ellipsoids.

Ein zweiter Satz, den wir hier noch anführen, ist sehr merkwürdig und überrascht durch seine Einfachheit. Er sagt aus, dass man, welches auch die Kräfte seien, durch die ein *beliebiges Ellipsoid* magnetisirt wird, die *magnetischen Momente* desselben immer in end-

licher Form auf eine sehr einfache Weise angeben kann. Durch die magnetischen Momente lässt sich aber nach § 4 die Wirkung eines jeden beliebig gestalteten Magneten, also auch die des Ellipsoids auf weit entfernte Punkte darstellen. Und diese Wirkung wird also ebenfalls in sehr einfacher Weise ausgedrückt werden können.

Ist die Entfernung des Punktes, auf den die Wirkung stattfindet, *nicht* so gross gegen die Dimensionen des Ellipsoids, dass die auf Seite 4 § 4 gemachten Vernachlässigungen erlaubt wären, so kann man die Wirkung nach negativen Potenzen der Entfernung entwickeln und die Coefficienten des *ersten Gliedes* dieser Reihe, *welches nur von den Momenten abhängt*, durch Beobachtung bei verschiedenen Entfernungen bestimmen. Die Vergleichung der in solcher Weise auf experimentellem Wege sich bestimmenden Coefficienten mit den jetzt anzugebenden theoretischen Werthen giebt die Mittel zur Bestimmung von $\varkappa$.

Die magnetischen Momente irgend eines beliebig gestalteten magnetischen Körpers seien

$$(1.)\qquad \begin{cases} \mathsf{A} = \varkappa \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dv, \\ \mathsf{B} = \varkappa \int \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dv, \\ \Gamma = \varkappa \int \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dv, \end{cases}$$

wo die Integrationen auszudehnen sind über den ganzen Raum des Körpers. Wir setzen $dv = dx\, dy\, dz$ und erhalten alsdann durch partielle Integration nach x:

$$\mathsf{A} = \varkappa \iint dy\, dz \left[x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] - \varkappa \iiint dx\, dy\, dz\, x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

also nach Gleichung (12'.) § 12:

$$\mathsf{A} = \varkappa \iint dy\, dz \left[x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + \varkappa \iiint dx\, dy\, dz\, x \left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right\},$$

d. i.: $$\mathsf{A} = \varkappa \iint dy\, dz \left[x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] + \varkappa \iint dx\, dz \left[x \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] + \varkappa \iint dx\, dy \left[x \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right].$$

Hier bezeichnen die eckigen Parenthesen, dass von den eingeschlossenen Grössen je die Differenz zweier Werthe derselben zu nehmen ist, welche *der Oberfläche* des Körpers angehören.*) Durch Einführung des Oberflächenelementes

*) So z. B. ist das im ersten Integral der letzten Formel enthaltene

$$\left[x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] = \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_n - \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_m,$$

wo mn eine mit der x-Axe parallele Sehne der gegebenen Oberfläche vorstellt.

$$do = \frac{dy\,dx}{\cos(n,x)} = \frac{dz\,dx}{\cos(n,y)} = \frac{dx\,dy}{\cos(n,x)}$$

erhalten wir:

$$\mathsf{A} = \varkappa \int do\, x \left(\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \cos(n,x) + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \cos(n,y) + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \cos(n,z) \right),$$

oder:

$$\mathsf{A} = \varkappa \int do\, \bar{x} \left\{ \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \frac{dx}{dn} + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \frac{dy}{dn} + \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \frac{dz}{dn} \right\},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\mathsf{A} = \varkappa \int do\, \bar{x}\, \overline{\frac{d\varphi}{dn}}. \tag{2.}$$

Nach dieser Vorbereitung gehen wir zurück zur Fundamentalgleichung (1.) § 13

$$\varphi + V + \varkappa \int \frac{do}{\varrho} \left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_i = 0,$$

wo ϱ die Entfernung des Elementes do von einem beliebigen *innern* Punkte xyz vorstellt. Durch Differentiation nach x erhalten wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \varkappa \int do \left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_i \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} = 0,$$

und hieraus durch Multiplication mit dem in xyz liegenden Raumelement dv

$$\int dv \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \int dv \frac{\partial V}{\partial x} + \varkappa \int do \left[\left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_i \int \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} \right)}{\partial x} dv \right] = 0.$$

Die Integration soll ausgedehnt werden über den ganzen Raum des Körpers. Die Coordinaten von do seien a, b, c; folglich:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}, \text{ mithin: } \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} \right)}{\partial x} = - \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} \right)}{\partial a};$$

wodurch unsere letzte Formel folgende Gestalt erhält:

$$\int dv \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \int dv \frac{\partial V}{\partial x} - \varkappa \int do \left[\left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_i \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{dv}{\varrho} \right] = 0. \tag{3.}$$

Es ist aber

$$- \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{dv}{\varrho}$$

die x-Componente der Wirkung des ganzen, mit homogener Masse von der Dichtigkeit 1 erfüllt gedachten Körpers auf einen Punkt seiner Oberfläche.

Die Gleichung (3.) gilt ganz allgemein für jede beliebige Gestalt

des Körpers. Wenden wir sie jetzt auf ein *Ellipsoid* an, so ist nach § 25 Gleichung (10.):

$$-\frac{\partial}{\partial a}\int \frac{dv}{\varrho} = a\mathfrak{M},$$

mithin:

$$\int dv \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \int dv \frac{\partial V}{\partial x} + \varkappa \mathfrak{M} \int do\, a \left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i = 0,$$

und nach Gleichung (1.) und (2.), wenn wir noch mit $\varkappa$ multipliciren:

$$(1 + \varkappa \mathfrak{M})\,\mathsf{A} + \varkappa \int dv \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Somit folgt:

$$\mathsf{A} = -\frac{\varkappa}{1 + \varkappa \mathfrak{M}} \int dv \frac{\partial V}{\partial x}; \tag{4.}$$

und in entsprechender Weise wird man erhalten:

$$\mathsf{B} = -\frac{\varkappa}{1 + \varkappa \mathfrak{N}} \int dv \frac{\partial V}{\partial y}, \tag{4'.}$$

$$\Gamma = -\frac{\varkappa}{1 + \varkappa \mathfrak{P}} \int dv \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{4''.}$$

Die Grössen rechts haben hier eine sehr einfache Bedeutung. Es haben nämlich die Componenten der magnetischen Kräfte die Werthe:

$$A = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad B = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad C = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Somit erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} \mathsf{A} &= \frac{\varkappa}{1 + \varkappa \mathfrak{M}} \int dv A, \\ \mathsf{B} &= \frac{\varkappa}{1 + \varkappa \mathfrak{N}} \int dv B, \\ \Gamma &= \frac{\varkappa}{1 + \varkappa \mathfrak{P}} \int dv C. \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

Wir können also die magnetischen Momente des Ellipsoids sofort angeben, wenn die magnetisirenden Kräfte gegeben sind.

Für ein *verlängertes Rotationsellipsoid* erhalten wir z. B. nach Gleichungen (2.) und (3.) § 29

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\varkappa}{1 + \varkappa \mathfrak{M}} = \frac{\varkappa}{1 + 2\pi\varkappa \frac{c^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{c^2}{c^2 - \varepsilon^2} - \frac{c}{2\varepsilon}\log\frac{c + \varepsilon}{c - \varepsilon}\right)}, \\ &\frac{\varkappa}{1 + \varkappa \mathfrak{N}} = \frac{\varkappa}{1 + \varkappa \mathfrak{P}} = \frac{\varkappa}{1 + 4\pi\varkappa \frac{c^2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{c}{2\varepsilon}\left[\log\frac{c + \varepsilon}{c - \varepsilon}\right] - 1\right)}. \end{aligned}\right. \tag{6.}$$

Demgemäss nehmen die Formeln (5.) z. B. für $\varepsilon = 0$, d. i. für die *Kugel* folgende Gestalt an:

$$(7.)\qquad \begin{cases} \mathsf{A} = \dfrac{\varkappa}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}\displaystyle\int A\,dv, \\ \mathsf{B} = \dfrac{\varkappa}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}\displaystyle\int B\,dv, \\ \Gamma = \dfrac{\varkappa}{1+\frac{4}{3}\pi\varkappa}\displaystyle\int C\,dv, \end{cases}$$

was in vollem Einklang steht mit den früher gefundenen Formeln (14.) § 18.

§ 44.
Nachträgliche Bemerkungen.

In diesen Vorlesungen ist die *magnetische Induktionsconstante* bald mit p, bald mit $\varkappa$, bald mit k bezeichnet worden, jedoch jedesmal in etwas anderem Sinne. Es ist nämlich:

$$(a.)\quad \varkappa = \frac{p}{1-\frac{4\pi p}{3}} \text{ oder was dasselbe: } p = \frac{\varkappa}{1+\frac{4\pi\varkappa}{3}} \text{ [vgl. (4.) Seite 31]}$$

und ferner:

$$(b.)\qquad k = \frac{\frac{4\pi\varkappa}{3}}{1+\frac{4\pi\varkappa}{3}} \text{ folglich: } k = \frac{4\pi p}{3} \text{ [vgl. (16.) Seite 49].}$$

Der Buchstabe k und ebenso auch die (zur Bezeichnung gewisser Potentiale dienenden) Buchstaben V und Q sind in diesen Vorlesungen in genau demselben Sinne gebraucht, wie in der bekannten *Poisson*'schen Abhandlung vom Jahre 1824 im *Tome V* der *Mém. de l'Acad. des sciences.* Hingegen finden wesentliche Unterschiede statt im Gebrauch der Buchstaben α, β, γ, φ. Und zwar sind in dieser Hinsicht folgende Relationen zu notiren:

$$(c.)\quad \alpha = k\alpha_p, \qquad \beta = k\beta_p, \qquad \gamma = k\gamma_p, \qquad \varphi = \frac{4\pi(1-k)}{3}\varphi_p,$$

falls man nämlich unter α, β, γ, φ (ohne Index) die Buchstaben der gegenwärtigen Vorlesungen, hingegen unter α_p, β_p, γ_p, φ_p die von *Poisson* benutzten Buchstaben versteht.





MAR 14 1894

